Упрощение игр

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то найти её решение, особенно при больших m и n, трудно. Иногда эту задачу можно упростить, сократив число стратегий, вычёркивая некоторые лишние: **дублирующие и заведомо невыгодные**.

В случае если у какого–либо из игроков две стратегии имеют в матрице только совпадающие элементы, то эти стратегии называются **дублирующими**. При этом неважно, какую из них игрок предпочтет для решения игры.

Рассмотрим две стратегии первого игрока – i – ю и k – ю. При этом пусть для всех элементов соответствующих строк матрицы выполняются условия: $a_{i1} \geq a_{k1}, a_{i2} \geq a_{k2}, \ldots, a_{in} \geq a_{kn}$.. В этом случае говорят, что i – я стратегия первого игрока **доминирует** над его j – й стратегией. Если каждое неравенство выполняется как строгое, то говорят, что одна стратегия **строго доминирует** над другой. В любом случае из двух стратегий первый игрок предпочтет доминирующую, поскольку при использовании доминируемой стратегии его выигрыш по меньшей мере не увеличится. В этом случае можно принять $p_k^* = 0$.

Аналогично рассмотрим две стратегии второго игрока - j - ю и l – ю, и при этом для элементов соответствующих столбцов матрицы выполняются условия: $a_{1j} \leq a_{1l}, a_{2j} \leq a_{2l}, \ldots, a_{mj} \leq a_{ml}$. Для второго игрока, как известно, более выгодной является стратегия, дающая меньший проигрыш, поэтому говорят, что j - я стратегия **доминирует** над l - й. Если попарные неравенства являются строгими, то говорят, что одна стратегия **строго доминирует** над другой. При этом, естественно, $q_l^* = 0$.

В результате при наличии доминирующих и дублирующих стратегий часть стратегий можно не рассматривать, что приведет в ряде случаев к значительному упрощению платежной матрицы.

Пример. Упростить игру, заданную матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Начнём упрощение с игрока А. Стратегия A_3 «дублирует» A_1 ($A_3 = A_1$). Следовательно, любую из них можно вычеркнуть (например, A_3). Далее сравнивая A_1 и A_2, видим, что элементы A_2 меньше или равны A_1 ($A_2 \leq A_1$). Т.е.

стратегия A_2 для игрока А желающего выиграть как можно больше, невыгодна. Т.о. Получаем матрицу $\begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для игрока В, который стремится как можно меньше проиграть, B_3 невыгодна по сравнению с B_4 ($B_3 > B_4$). Вычёркиваем B_3. Т.о. игра 4×4 свелась к игре 2×3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Эквивалентное преобразование платежной матрицы применяется для облегчения расчетов, и при этом оптимальные смешанные стратегии игроков не изменяются.

Теорема. Оптимальные смешанные стратегии $\left(S_A^*; S_B^*\right)$ соответственно 1 – го и 2 – го игроков в матричной игре $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ с ценой $\boldsymbol{v}$ будут оптимальными и в матричной игре $\left(b \cdot a_{ij} + c\right)_{m\times n}$ с ценой $v' = bv + c$, где $b > 0, c \in R$.

Пример. В матричной игре с платежной матрицей $\begin{pmatrix} 1.2 & 1.8 \\ 0.6 & 0.9 \end{pmatrix}$ примем *b=10, C=-6*. Применим преобразование *bA+c*, тогда получим игру с теми же оптимальными стратегиями, но с другой эквивалентной матрицей: $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.