## Решение игр $m \times n$. Эквивалентность матричной игры паре двойственных ЗЛП

Рассмотрим матричную игру размером $m \times n$ $(\min\{m,n\} > 2)$.

Сведем её к задаче линейного программирования в общем виде. Имеем:

$$P = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Будем считать, что $a_{ij} \ge 0$. Это всегда можно сделать по теореме об эквивалентном преобразовании платежной матрицы, следовательно, можно считать цену игры положительным числом, $v>0$.

Для первого игрока имеем систему неравенств (с учетом того, что первый игрок стремится как можно больше выиграть, цена игры для него будет превышать $v$):

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + & a_{21}p_2 + & \dots & + a_{m1}p_m & \ge v, \\ a_{12}p_1 + & a_{22}p_2 + & \dots & + a_{m2}p_m & \ge v, \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + & a_{2n}p_2 + & \dots & + a_{mn}p_m & \ge v, \\ p_1 + & p_2 + & \dots & + p_m & = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{21}x_2 + & \dots & + a_{m1}x_m & \ge 1, \\ a_{12}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{m2}x_m & \ge 1, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + & a_{2n}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_m & \ge 1, \\ T = \frac{1}{v} = x_1 + & x_2 + & \dots & + x_m & = 1. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Введем новые переменные делением на цену игры: $\boxed{x_i = \frac{p_i}{v}}$, тогда получим ЗЛП.

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + & a_{12}q_2 + & \dots & + a_{1n}q_n & \le v, \\ a_{21}q_1 + & a_{22}q_2 + & \dots & + a_{2n}q_n & \le v, \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + & a_{n2}q_2 + & \dots & + a_{mn}q_n & \le v, \\ q_1 + & q_2 + & \dots & + q_m & = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + & a_{12}y_2 + & \dots & + a_{1n}y_n & \le 1, \\ a_{21}y_1 + & a_{22}y_2 + & \dots & + a_{2n}y_n & \le 1, \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + & a_{n2}y_2 + & \dots & + a_{mn}y_n & \le 1, \\ Z = \frac{1}{v} = y_1 + & y_2 + & \dots & + y_m & \to \max \\ y_j \ge 0, & j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

При построении целевой функции учитываем, что цена игры для первого игрока максимизируется.

Аналогично имеем для второго игрока систему неравенств:

Разделив на цену игры и введя новые переменные $\boxed{y_j = \frac{q_j}{v}}$, получим ЗЛП для второго игрока:

Здесь целевая функция задана на максимум, т.к. цена игры для второго игрока минимизируется.

В результате получили пару симметричных двойственных ЗЛП. Согласно первой теореме двойственности, $T_{\min} = Z_{\max}$, следовательно, цена игры $v$ имеет одно и тоже значение для обоих игроков.