АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛП

Теоретическое введение

Неизбежное колебание значений таких экономических параметров, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к неоптимальности или непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится **анализ чувствительности**, т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение задачи ЛП.

Для решения задач анализа чувствительности ограничения линейной модели классифицируются следующим образом. **Связывающие** ограничения проходят через оптимальную точку. **Несвязывающие** ограничения не проходят через оптимальную точку. Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют **дефицитным,** а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением – **недефицитным**. Ограничение называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на ОДР и, следовательно, на оптимальное решение. Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

• на сколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) запас *дефицитного* ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

• на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) запас *недефицитного* ресурса при сохранении оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (ограничения типа $\leq$) **запаса какого из ресурсов наиболее выгодно**?

3. Анализ изменения коэффициентов ЦФ: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

Методика графического анализа чувствительности оптимального решения

1. Первая задача анализа на чувствительность (анализ на чувствительность к правой части ограничений)

Проанализируем чувствительность оптимального решения задачи о производстве красок. ОДР задачи (рис. 1) – многоугольник ABCDEF. В оптимальной точке E пересекаются прямые (1) и (2). Поэтому ограничения (1) и (2) являются ***связывающими***, а соответствующие им ресурсы (ингредиенты A и B) – ***дефицитными***. Рассмотрим экономический смысл этих понятий. Точка максимума ЦФ E соответствует суточному производству 3 1/3 т краски 1-го вида и 1 1/3 т краски 2- го вида. В производстве красок используются ингредиенты A и B. Суточный запас на складе ингредиентов A и B – это правые части связывающих ограничений (1) и (2) (6 и 8 т ингр./сутки). Согласно этим ограничениям, на производство в точке E расходуется:

$$1\cdot 3\frac{1}{3}+2\cdot 1\frac{1}{3}=6\left[\text{т ингр.A/сутки}\right]\ (1) \quad \text{и} \quad 2\cdot 3\frac{1}{3}+1\cdot 1\frac{1}{3}=8\left[\text{т ингр.B/сутки}\right]\ (2).$$

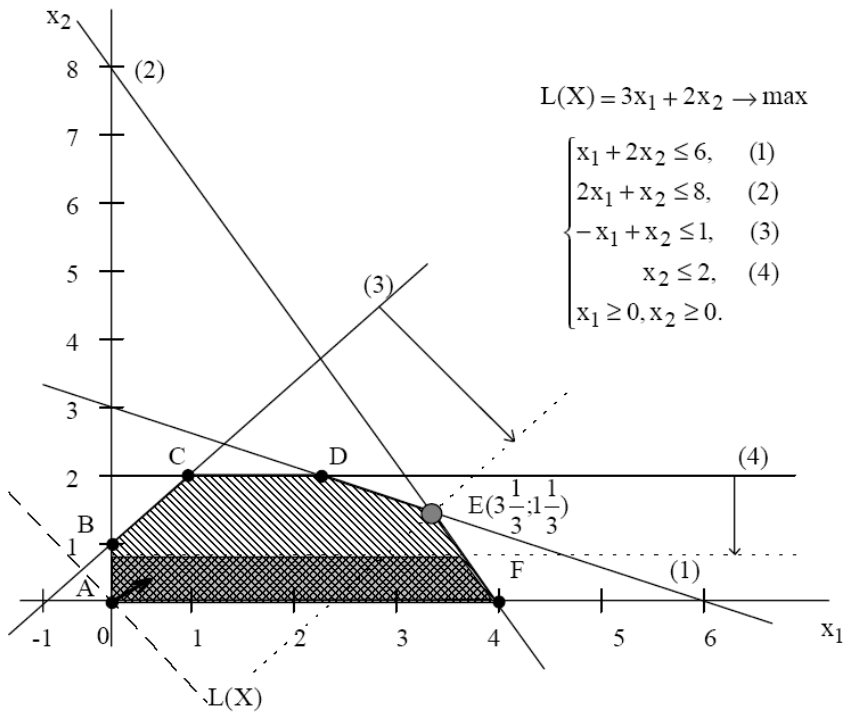

Рис.1 графическое решение задачи о красках

Таким образом, понятие "*связывающие ограничения*" (1) и (2) означает, что при производстве красок в точке $E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ запасы ингредиентов А и В расходуются ***полностью*** и по этой причине невозможно дальнейшее наращивание производства. В этом заключается экономический смысл понятия *дефицитности* ресурсов, т.е. если фирма сможет увеличить суточные запасы ингредиентов, то это позволит увеличить выпуск красок. В связи с этим возникает вопрос: до какого уровня целесообразно увеличить запасы ингредиентов и на сколько при этом увеличится *оптимальное* производство красок?

Правило № 1

Чтобы графически определить максимальное увеличение запаса дефицитного ресурса, вызывающее *улучшение* оптимального решения, **необходимо** передвигать соответствующую прямую в направлении *улучшения* ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет *избыточным*. При прохождении прямой (1) через точку К (рис. 2) многоугольник ABCKF становится ОДР, а ограничение (1) – избыточным. Действительно, если удалить прямую (1), проходящую через точку К, то ОДР ABCKF не изменится. Точка К становится *оптимальной*, в этой точке ограничения (2) и (4) становятся *связывающими.*

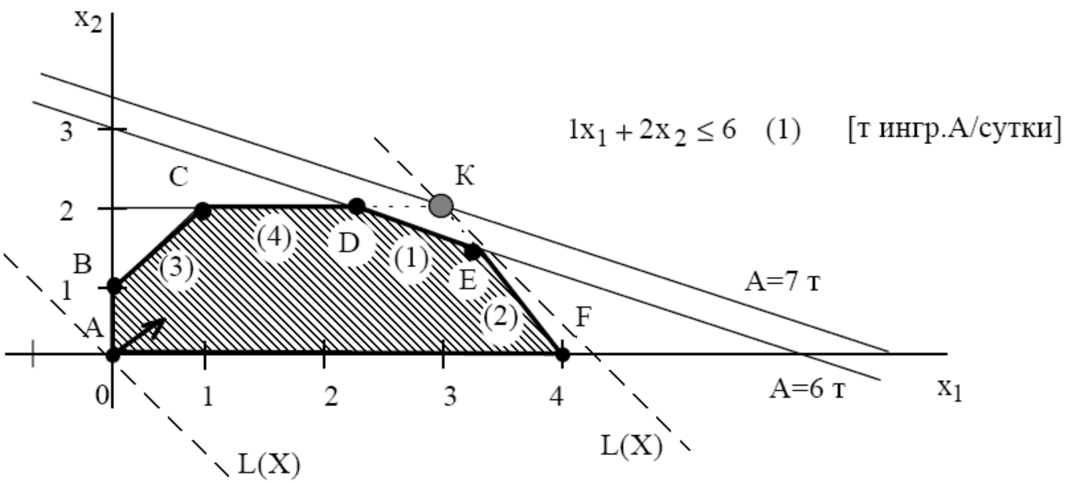

Рис. 2 Анализ увеличения ресурса А.

Правило № 2

Чтобы *численно* определить максимальную величину запаса дефицитного ресурса, вызывающую улучшение оптимального решения, **необходимо:**

1) определить координаты точки (x_1;x_2), в которой соответствующее ограничение становится *избыточным*;

2) подставить координаты (x_1;x_2)в *левую часть* соответствующего ограничения.

Координаты точки K(3;2) находятся путем решения системы уравнений прямых (2) и (4). Т.е. в этой точке фирма будет производить 3 т краски 1-го вида и 2 т краски 2-го вида. Подставим x_1=3 и x_2=2 в левую часть ограничения (1) и получим максимально допустимый запас ингредиента А.

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7 \ \text{[т ингр.А/сутки]}.$$

Дальнейшее увеличение запаса ингредиента А нецелесообразно, потому что это *не изменит* ОДР и *не приведет* к другому оптимальному решению (см. рис. 2). Доход от продажи красок в объеме, соответствующем точке K, можно рассчитать, подставив ее координаты (3;2) в выражение ЦФ

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13 \ \text{[тыс.руб./сутки]}.$$

Рассмотрим вопрос о целесообразности увеличения запаса ингредиента В. Согласно правилу № 1, соответствующее ограничение (2) становится избыточным в точке J, в которой пересекаются прямая (1) и ось переменной x_1 (рис. 3). Многоугольник ABCDJ становится ОДР, а точка J(6;0) – оптимальным решением.

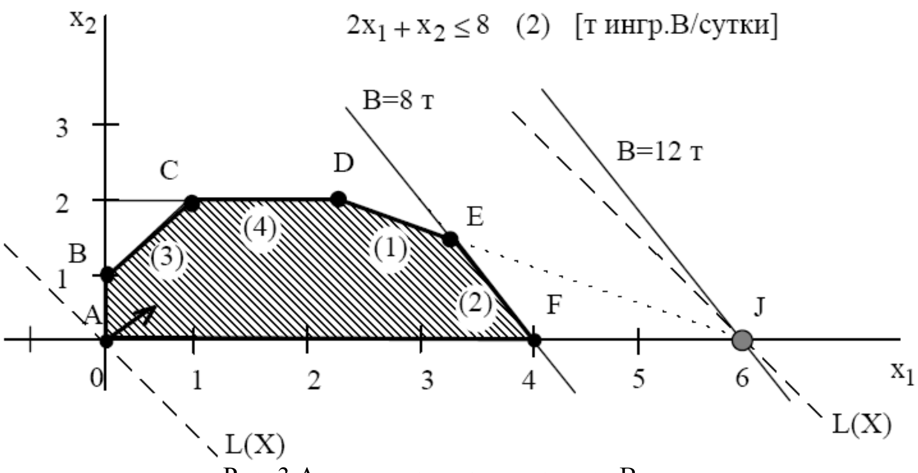

Рис. 3 Анализ увеличения ресурса В.

В точке J выгодно производить только краску 1-го вида (6 т в сутки). Доход от продажи при этом составит:

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18 \text{ [тыс.руб./сутки]}.$$

Чтобы обеспечить такой режим работы, согласно правилу № 2, запас ингредиента B надо увеличить до величины:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 6 + 0 = 12 \text{ [т ингр.B/сутки]}.$$

Ограничения (3) и (4) являются ***не связывающими***, т.к. не проходят через оптимальную точку E (см. рис. 1). Соответствующие им ресурсы (спрос на краски) являются ***недефицитными***. С экономической точки зрения это означает, что в данный момент уровень спроса на краски *непосредственно* не определяет объемы производства. Поэтому некоторое его колебание может никак не повлиять на оптимальный режим производства в точке E.

Например, увеличение (уменьшение) спроса на краску 2-го вида будет соответствовать перемещению прямой ограничения $x_2 \le 2$ (4) вверх (вниз). Перемещение прямой (4) вверх никак не может изменить точку E максимума ЦФ. Перемещение же прямой (4) вниз не влияет на существующее оптимальное решение *только до пересечения* с точкой E (см. правило № 3.3). Из рис. 1 видно, что дальнейшее перемещение (4) приведет к тому, что точка E будет за пределами новой ОДР, выделенной более темным цветом. Кроме того, любое оптимальное решение для этой новой ОДР будет хуже точки E.

Правило № 3

Чтобы определить максимальное уменьшение запаса недефицитного ресурса, *не меняющее* оптимальное решение, **необходимо** передвигать соответствующую прямую *до пересечения с оптимальной* точкой.

Правило № 4

Чтобы *численно* определить минимальную величину запаса недефицитного ресурса, не меняющую оптимальное решение, **необходимо** подставить координаты *оптимальной* точки в *левую часть* соответствующего ограничения.

Чтобы выяснить, до каких пределов падение спроса на краску 2-го вида не повлияет на производство в точке $E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ используем правило № 4. Подставляем в левую часть ограничения (4) координаты точки E, получаем $x_2 = 1\frac{1}{3}$

Делаем ***вывод***: предельный уровень, до которого может упасть спрос на краску 2-го вида и при котором не изменится оптимальность полученного ранее решения, равен 1 1/3 т краски в сутки.

Экономический смысл ограничения (3)

$$-x_1 + x_2 \le 1 \;\; [\text{т краски/сутки}]$$

в том, что объем продаж краски 2-го вида может превысить объем продаж краски 1-го вида максимум на 1 т. Дальнейшее увеличение продаж краски 2-го вида по сравнению с краской 1-го вида графически отобразится перемещением прямой (3) влево и вверх, но никак не повлияет на оптимальность точки E. Но если разность спросов на краску 2-го и 1-го видов будет уменьшаться, то прямая (3) будет перемещаться ниже и правее. Последним положением прямой (3), при котором точка E остается оптимальной, является пересечение с точкой E (см. рис. 3.1). Согласно правилу № 4, подставим координаты точки $E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ в левую часть ограничения (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \;\; [\text{т краски}].$$

Получаем, что разность спросов на краску 2-го и 1-го вида в точке стала отрицательной. То есть, прохождение прямой (3) через точку E означает, что краску 2-го вида будут покупать в меньшем объеме, чем краску 1-го вида

$$x_1 - x_2 = 2 \;\; [\text{т краски/сутки}].$$

Делаем ***вывод***: максимальное превышение спроса на краску 1-го вида над спросом на краску 2-го вида, при котором оптимальное решение в точке E не изменится, составляет 2 т краски в сутки. Результаты решения первой задачи анализа оптимального решения на чувствительность представлены в табл.

Результаты анализа ресурсов задачи

№	Тип ресурса	Max изменение ресурса, $\max \Delta R_i$, т/сутки	Max изменение дохода, $\max \Delta L(X^*)$, тыс. руб./сутки	Ценность дополнительной единицы ресурса $y_i = \frac{\max \Delta L(X^*)}{\max \Delta R_i}$, тыс. руб./т
(1)	Дефицитный	7-6=+1	$13\text{-}12\frac{2}{3}=+\frac{1}{3}$	$y_1 = \left[\frac{1}{3}\middle/1\right] = \frac{1}{3}$
(2)	Дефицитный	12-8=+4	$18\text{-}12\frac{2}{3}=+5\frac{1}{3}$	$y_2 = \left[5\frac{1}{3}\middle/4\right] = 1\frac{1}{3}$
(3)	Недефицитный	-2-1= -3	$12\frac{2}{3}\text{-}12\frac{2}{3}=0$	$y_3 = [0/(-3)] = 0$
(4)	Недефицитный	$1\frac{1}{3}\text{-}2=-\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}\text{-}12\frac{2}{3}=0$	$y_4 = \left[0\middle/\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 0$

Вторая задача анализа на чувствительность

Анализ представленной таблицы показывает, что к улучшению оптимального решения, т.е. к увеличению суточного дохода приводит увеличение *дефицитных* ресурсов. Для определения выгодности увеличения этих ресурсов используют понятие **ценности дополнительной единицы i-го ресурса** y_i

$$y_i = \frac{\max \Delta L\left(X^*\right)}{\max \Delta R_i},$$

где $\max\ \Delta L(X^*)$ – максимальное приращение оптимального значения ЦФ; $\max\ \Delta R_i$– максимально допустимый прирост объема i-го ресурса.

Например, из табл. следует, что увеличение суточного запаса ингредиента А [ограничение (1)] на 1 т позволит получить дополнительный доход, равный y_1=1/3тыс.руб./сутки, в то время как увеличение запаса В [ограничение (2)] на 1 т принесет y_2=1 1/3 тыс.руб./сутки. Недефицитные ресурсы имеют нулевые ценности, поскольку изменение этих ресурсов не приводит к увеличению дохода.

Вывод: дополнительные вложения в первую очередь необходимо направлять на увеличение ресурса В, а лишь потом на ресурс А. Изменять недефицитные ресурсы нет необходимости.

Третья задача анализа на чувствительность

Графический анализ допустимого диапазона изменения цен Изменение цен на продукцию, т.е. изменение коэффициентов ЦФ, представляется на графике вращением целевой прямой вокруг оптимальной точки. Так, при увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении c_2 целевая прямая вращается ***по*** часовой стрелке. При уменьшении c_1 или же увеличении c_2 целевая прямая вращается ***против*** часовой стрелки (рис. 4). При таких поворотах точка E будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой ***не выйдет за пределы***, определяемые наклонами прямых ограничений (1) и (2). Так, например, если наклон целевой прямой совпадет с наклоном прямой (1), то оптимальным решением будут точки отрезка DE.

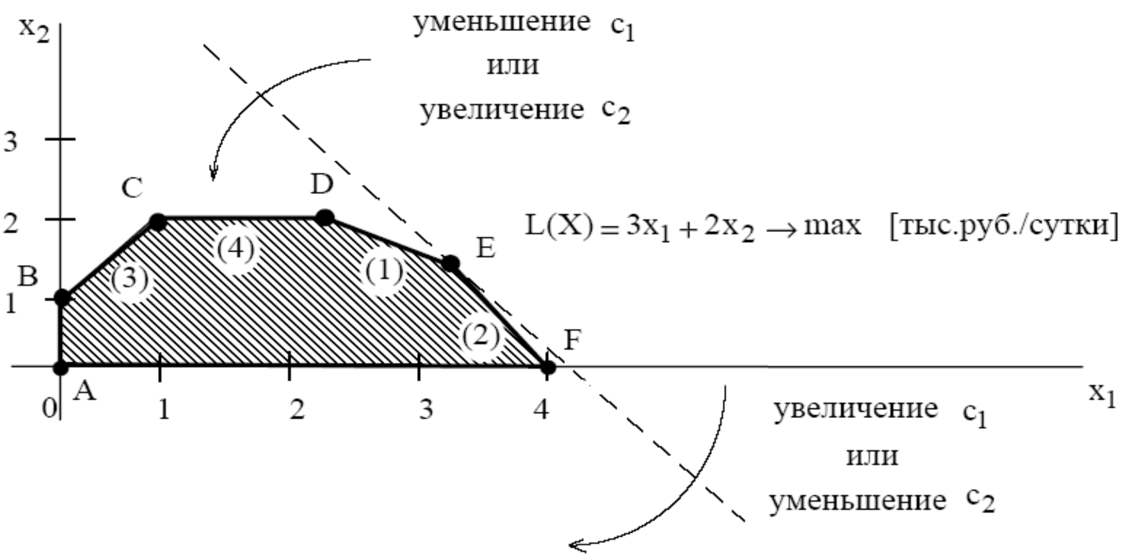

Рис. 4. Анализ изменения цен

При совпадении с прямой (2) оптимальным решением будут точки отрезка EF. Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной точкой станет соответственно D или F.

Допустим, что цена на краску 2-го вида не меняется, т.е. зафиксируем значение целевого коэффициента c_2. Проанализируем графически результаты изменения значения целевого коэффициент c_1, т.е. цены на краску 1-го вида. Оптимальное решение в точке E не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично, оптимальное решение в точке E не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

Аналитический поиск допустимого диапазона изменения цен

Совпадение в процессе вращения целевой прямой с прямой ограничения означает, что углы их наклона относительно горизонтальной оси сравнялись, а значит, стали равны тангенсы углов наклона этих прямых.

Правило 5

Чтобы определить границы допустимого диапазона изменения коэффициента ЦФ, например min c_1 и max c_1, **необходимо** приравнять тангенс угла наклона целевой прямой ЦФ tgα поочередно к тангенсам углов наклона прямых связывающих ограничений, например $tg\alpha_{(1)}$ и $tg\alpha_{(2)}$ (рис. 5 и 6)

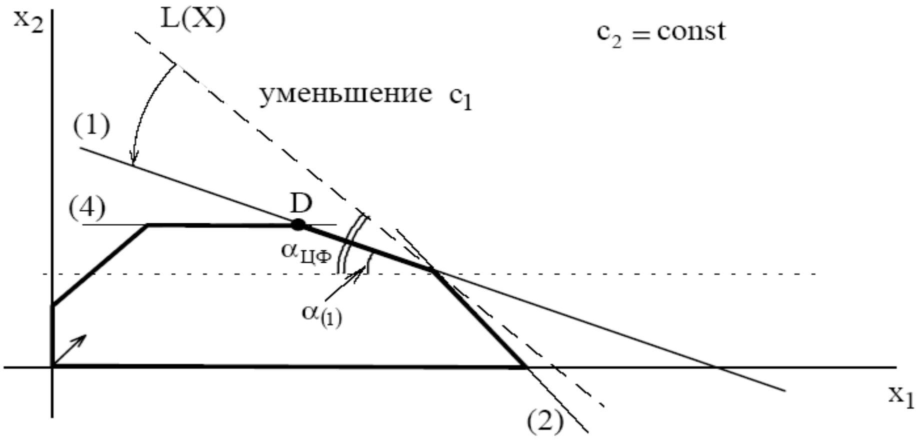

Рис. 5. Определение min c_1

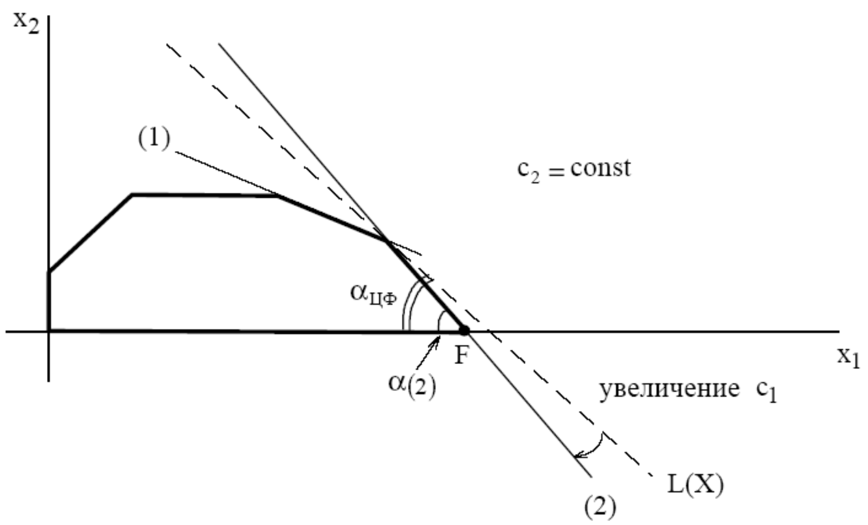

Рис. 6. Определение max c_1

Определим насколько максимально может снизиться цена на краску 1-го вида, не изменяя оптимальную точку Е. Для этого применим правило № 5 и формулу расчета тангенса угла наклона прямой (рис. 7).

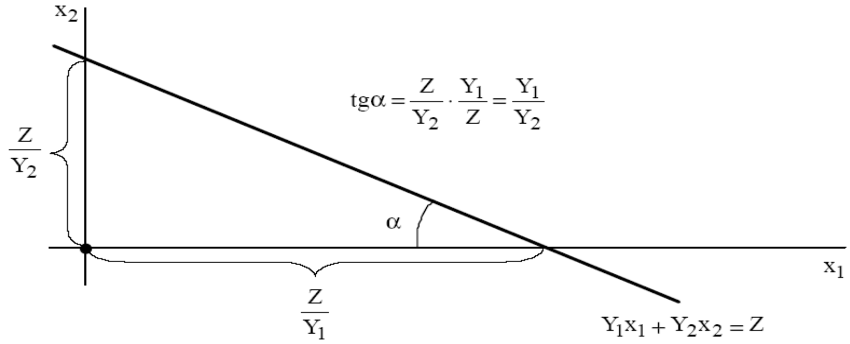

Рис. 7. Определение тангенса угла наклона tgα прямой $Y_1x_1+ Y_2x_2=Z$

Определим тангенсы углов наклона:

1) целевой прямой $L(X)=3x_1+2x_2 \to \max$, учитывая, что $c_2=2$ фиксировано

$$\mathrm{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{2};$$

2) связывающего ограничения $x_1+2x_2 \le 6$ (1)

$$\mathrm{tg}\alpha_{(1)} = \frac{1}{2};$$

3) связывающего ограничения $2x_1+x_2 \le 8$ (2)

$$\mathrm{tg}\alpha_{(2)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для нахождения min c_1 целевая прямая должна совпасть с прямой (1) (рис. 5):

$$\mathrm{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \mathrm{tg}\alpha_{(1)};$$

$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\min c_1 = 1 \ [\text{тыс.руб./т}].$$

Для нахождения max c_1 целевая прямая должна совпасть с прямой (2) (рис. 6):

$$\mathrm{tg}\alpha_{\text{ЦФ}} = \mathrm{tg}\alpha_{(2)};$$

$$\frac{c_1}{2} = 2;$$

$$\max c_1 = 4 \ [\text{тыс. руб. / т}].$$