Транспортная задача

Методы нахождения опорных планов:

Метод северо-западного угла

На каждом шаге метода северо-западного угла из всех не вычеркнутых клеток выбирается самая левая и верхняя (северо-западная) клетка. Другими словами, на каждом шаге выбирается первая из оставшихся не вычеркнутых строк и первый из оставшихся не вычеркнутых столбцов. Для того, чтобы заполнить клетку (i,j), необходимо сравнить текущий запас товара в рассматриваемой i-й строке $a_i^{\text{тек}}$ с текущей потребностью в рассматриваемом j-м столбце $b_j^{\text{тек}}$.

Если существующий запас позволяет перевезти всю потребность, то:

• в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение потребности $b_j^{\text{тек}}$;

• j-й столбец вычеркивается, поскольку его потребность уже исчерпана;

• от существующего запаса в i-й строке отнимается величина сделанной перевозки, прежний запас зачеркивается, а вместо него записывается остаток, т.е. ($a_i^{\text{тек}}$ - $b_j^{\text{тек}}$).

Если существующий запас не позволяет перевезти всю потребность, то:

• в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение запаса $a_i^{\text{тек}}$;

• i-я строка вычеркивается, поскольку ее запас уже исчерпан;

• от существующей потребности в j-ом столбце отнимается величина сделанной перевозки, прежняя потребность зачеркивается, а вместо нее записывается остаток, т.е. ($b_j^{\text{тек}}$ - $a_i^{\text{тек}}$)

Нахождение опорного плана продолжается до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы.

Метод минимального элемента

На каждом шаге метода минимального элемента из всех не вычеркнутых клеток транспортной матрицы выбирается клетка с минимальной стоимостью перевозки min c_{ij}. Заполнение выбранной клетки производится по правилам, описанным выше.

Метод Фогеля

На каждом шаге метода Фогеля для каждой i-й строки вычисляются штрафы d_i как разность между двумя наименьшими тарифами строки. Таким же образом вычисляются штрафы d_j для каждого j-го столбца. После чего выбирается максимальный штраф из всех штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, соответствующем выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом min c_{ij}.

Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом min c_{ij}.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка (i,j) с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по i-й строке и j-му столбцу.

Задача

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 110, 90, 130, 100 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Проверка сбалансированности задачи показывает, что суммарный объем запасов $\sum_{i=1}^{n} a_i = 210+170+65=445$ больше суммарного объема потребностей $\sum_{j=1}^{m} b_j = 110+90+130+100=430$, т.е. введение необходимо введение фиктивного столбца $b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j = 445-430=15$, после чего задача становится сбалансированной $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Результаты нахождения опорного плана различными методами представлены в следующих таблицах.

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом северо-западного угла.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Запасы продукции в пунктах отправления
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	210/100/10/0
A_2	2	5	120 4	50 9	0	170/50
A_3	9	2	3	50 2	15 0	65/15/0
Потребности в продукции, в пунктах назначения	110/0	90/0	130/120/0	100/50/0	15/0	445 = 445

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

$$L_{СЗУ} = 110\cdot 5+90\cdot 8+10\cdot 1+120\cdot 4+50\cdot 9+50\cdot 2+15\cdot 0=2130.$$

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом минимального элемента.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Запасы продукции в пунктах отправления
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	8	130 1	80 2	0	210/80/0
A_2	110 2	25 5	4	20 9	15 0	170/60/35/15/0
A_3	9	65 2	3	2	0	65/0
Потребности в продукции, в пунктах назначения	110/0	90/25/0	130/0	100/20/0	15/0	445 = 445

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

$$L_{МЭ} = 130\cdot 1 + 80\cdot 2 + 110\cdot 2 + 25\cdot 5 + 20\cdot 9 + 15\cdot 0 + 65\cdot 2 = 945.$$

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом Фогеля.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Запасы продукции в пунктах отправления	Штрафы строк						
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$								
A_1	5	8	110 1	100 2	0	210/110/0	1	1	1	**7**			
A_2	110 2	25 5	20 4	9	15 0	170/60/35/15/0	2	1	1	1	1	4	0
A_3	9	65 2	3	2	0	65/0	0	0					
Потребности в продукции, в пунктах назначения	110/0	90/25/0	130/20/0	100/0	15/0	445 = 445							
Штрафы столбцов	**3**	3	2	0	0								
		3	2	0	0								
		3	3	**7**	0								
		3	3		0								
		5	4		0								
			4		0								
					0								

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

$$L_Ф = 110 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 110 \cdot 2 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 0 + 65 \cdot 2 = 865.$$

Отметим, что хотя введенные фиктивные строки или столбцы и считаются равноправными, но в случае задания в них нулевых тарифов эти тарифы не считаются как минимальные при построении опорных планов.

Отметим, что опорный план, найденный методом северо-западного угла дает в общем случае наихудшее приближение, т.к. является «слепым», т.е. совершенно не зависит от тарифов.

Метод минимального элемента предполагает перевозки в первую очередь в те пункты назначения, доставка в которые обойдется дешевле. В силу этого в общем случае суммарные затраты на транспортировку при применении этого метода несколько меньше.

Метод Фогеля путем введения понятия штрафов выбирает для перевозок те маршруты, не выбрав которые мы могли бы увеличить расходы на транспорт в дальнейшем, из-за отсутствия выбора места назначения или места отправления.

Начав решать транспортную задачу и получив опорный план, необходимо приступить непосредственно к оптимизации этого плана. Данная оптимизация может быть проведена методом потенциалов.

Потенциал удобно воспринимать как себестоимость продукции.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом северо – западного элемента, минимального элемента или методом Фогеля).

3. Опорный план проверяется на условие «вырождения». Согласно теореме Данцига количество занятых клеток в плане не должно превышать суммарного числа строк и столбцов минус единицу $K_з \le m+n-1$ (Для дальнейшего решения необходимо добиться того, чтобы количество занятых клеток в плане в точности равнялось суммарному числу строк и столбцов минус единица $K_з = m+n-1$, этого можно добиться вводя при необходимости нулевые перевозки, т.е. заполняя некоторые клетки нулями), где $К_з$ – число

занятых клеток; n – число строк (пунктов отправления); m – число столбцов (пунктов назначения).

4. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному плану. Для этого одной из строк, или одному из столбцов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) присваивают произвольное значение «потенциал» (значение потенциала удобно брать больше, чем значение максимального тарифа) и через заполненные клетки, используя соотношение $u_i + c_{ij} = v_j$ (где u_i– потенциал строки, а v_j– потенциал столбца), строят систему потенциалов, т.е. получают потенциалы всех строк и столбцов. (Поясним, что предложенная для построения системы потенциалов формула $u_i + c_{ij} = v_j$ позволяет по известной себестоимости товара в пункте отправления путем прибавления к ней тарифа за транспортировку определить себестоимость товара в пункте назначения, и обратно, преобразовав формулу $v_j - c_{ij} = u_i$ по известной себестоимости товара в пункте назначения, становится возможным, вычтя тариф за транспортировку, определить себестоимость товара в пункте отправления. Еще раз отметим, что система потенциалов строится только через заполненные клетки.)

5. Проверяют условие оптимальности $u_i + c_{ij} \geq v_j$, это условие можно проверять только для свободных клеток таблицы, т.к. в заполненных оно всегда выполнено (Отметим, что невыполнение данного условия фактически означает возможность уменьшения себестоимости товара в пункте назначения, которое может быть достигнуто за счет перераспределения транспортных потоков).

6. Если условие оптимальности выполнено для всех клеток матрицы, то нами получен оптимальный план перевозок (т.к. уменьшения себестоимости товара в пунктах назначения за счет перераспределения транспортных потоков невозможно) и необходимо только найти значение целевой функции $L(X)$. Если же для какой-либо клетки условие оптимальности нарушается, то необходимо применить «формальное правило улучшения плана» и вернуться к пункту 3.

Формальное правило улучшения плана:

а) начиная с клетки, имеющей нарушение, двигаясь только по горизонталям и вертикалям, строится замкнутый контур с вершинами в занятых клетках;

б) начиная с клетки, имеющей нарушение, нумеруются вершины контура (направление обхода контура значения не имеет);

в) в четных вершинах контура находится значение минимальной перевозки;

г) для балансировки матрицы в нечетные вершины контура найденное значение прибавляется, из четных вершин – вычитается. Получается новый, улучшенный план.

Задача

Найдем оптимальное решение транспортной задачи опорный план которой представлен следующей транспортной матрицей:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0
A_2	2	5	120 4	50 9	0
A_3	9	2	3	50 2	15 0

Решение

Проверяем условие Данцига: 7 = 5 + 3 – 1.

Строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	100
A_2	2	5	120 4	50 9	0	97
A_3	9	2	3	50 2	15 0	104
Потенциалы	105	108	101	106	104	

Через заполненные клетки определяем потенциалы первого, второго, и третьего столбцов. Далее через клетку (A_2,B_3) *определяем потенциал второй* *строки, через клетку* (A_2,B_4) *определяем потенциал четвертого столбца. После чего через клетку* (A_3,B_4) *определяем потенциал третей строки и через клетку* (A_3,$B_ф$) *потенциал последнего столбца.*

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4, (A_1,$B_ф$), *где нарушение составляет* 4, (A_2,B_1), *где нарушение составляет* 6, (A_2,B_2), *где нарушение составляет* 6, (A_2,$B_ф$), *где нарушение составляет* 7 *и* (A_3,B_2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A_2,$B_ф$), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	100
A_2	2	5	120 4	④ ~~50~~ **35** 9	**15** ① 0	97
A_3	9	2	3	③ ~~50~~ **65** 2	~~15~~ ② 0	104
потенциалы	105	108	101	106	104	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0
A_2	2	5	120 4	35 9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал, равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	100
A_2	2	5	120 4	35 9	15 0	97
A_3	9	2	3	65 2	0	104
Потенциалы	105	108	101	106	97	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4, (A_2,B_1), *где нарушение составляет* 6, (A_2,B_2), *где нарушение составляет* 6 *и* (A_3,B_2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшения плана для клетки (A_2,B_1), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	~~110~~ 5	90 8	~~10~~ ***120*** 1	2	0	100
A_2	***110*** 2	5	***10*** ~~120~~ 4	35 9	15 0	97
A_3	9	2	3	65 2	0	104
потенциалы	105	108	101	106	97	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	90 8	120 1	2	0
A_2	110 2	5	10 4	35 9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	90 8	120 1	2	0	103
A_2	110 2	5	10 4	35 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
Потенциалы	102	111	104	109	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4, (A_2,B_2), *где нарушение составляет* 6 *и* (A_3,B_2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A_2,B_2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	5	2 ~~90~~ **80** 8	3 ~~120~~ **130** 1	2	0	103
A_2	110 2	1 **10** 5	4 ~~10~~ 4	35 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
потенциалы	102	111	104	109	100	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	80 8	130 1	2	0
A_2	110 2	10 5	4	35 9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	80 8	130 1	2	0	97
A_2	110 2	10 5	4	35 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
Потенциалы	102	105	98	109	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетке* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4.

Применим формальное правило улучшения плана для клетки (A_1,B_4).

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	5	④ ~~80~~ **45** 8	130 1	**35** ① 2	0	97
A_2	110 2	~~10~~ **45** ③ 5	4	~~35~~ ② 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
потенциалы	102	105	98	109	100	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	45 8	130 1	35 2	0
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	45 8	130 1	35 2	0	98
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	98
Потенциалы	102	105	99	100	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,$B_ф$), *где нарушение составляет* 2, (A_3,B_2), *где нарушение составляет* 5 *и* (A_3,$B_ф$), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A_3,B_2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

склады \ магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	5	2 ~~45~~ 8	130 1	~~35~~ 80 2	3 0	98
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0	100
A_3	9	1 45 2	3	~~65~~ 20 2	4 0	98
потенциалы	102	105	99	100	100	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	8	130 1	80 2	0
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0
A_3	9	45 2	3	20 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	8	130 1	80 2	0	103
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0	100
A_3	9	45 2	3	20 2	0	103
Потенциалы	102	105	104	105	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно выполнено во всех клетках, следовательно получен оптимальный план перевозок. Суммарные затраты за транспортировку составит:*

$$L = 130 \cdot 1 + 80 \cdot 2 + 110 \cdot 2 + 45 \cdot 5 + 15 \cdot 0 + 45 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 865.$$

Отметим, что мы за нулевое приближение; мы выбрали опорный план, полученный методом «северо-западного угла», в силу чего нам и пришлось производить большое количество итераций. Если бы в качестве начального приближения был выбран опорный план, полученный методом «минимального элемента», то необходимое количество итераций было бы существенно меньше, а при выборе в качестве исходного опорного плана построенного «методом Фогеля», в данном примере вообще не пришлось бы производить итерации.

Отметим также, что при решении данного примера контуры которые мы строили, получались прямоугольные; это не всегда так, контуры могут быть различных форм, но строятся они всегда по одному принципу и в каждом случае могут быть получены единственным образом.