55 КГЭУ

ФИЗИКА

Часть 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКА

Практикум

В двух частях

Часть 1

Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика. Электростатика. Постоянный электрический ток

Казань
2023

УДК 53
ББК 22.3
Ф50

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор КИББ КазНЦ РАН *А. В. Анисимов*
д-р техн. наук, профессор Института физики ФГАОУ ВО КФУ *А. Н. Туранов*

Авторы:
О. С. Зуева, Р. Р. Хуснутдинов, А. Ф. Гайсин, Е. В. Газеева,
С. О. Гарькавый, Г. Н. Зайнашева, Ю. Ф. Зуев, Е. Л. Корягина, В. Л. Матухин,
С. Ф. Малацион, А. И. Погорельцев, И. Г. Севастьянов,
Н. Р. Хуснутдинова, Е. В. Шмидт

Ф50 **Физика :** практикум : в 2 частях / О. С. Зуева, Р. Р. Хуснутдинов, А. Ф. Гайсин [и др.]. – Казань : КГЭУ, 2023.
Часть 1 : Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика. Электростатика. Постоянный электрический ток. – 2023. – 257 с.

Содержит описание практических занятий по следующим темам: «Физические основы механики», «Молекулярная физика и термодинамика», «Электростатика», «Постоянный электрический ток». Наряду с краткими теоретическими сведениями, подкрепленными подробно разобранными примерами решения типовых задач, в конце каждой темы приведены вопросы и задания для самостоятельного выполнения. С целью систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся в конце издания приведены контрольные работы, каждая из которых выполняется в соответствии со своим вариантом и представляет собой совокупность вопросов и задач по озвученным выше темам.

Предназначен для обучающихся по образовательным программам технических направлений подготовки бакалавров.

УДК 53
ББК 22.3

ВВЕДЕНИЕ

Современная физика – обширная и разветвленная наука, предметом которой является описание простых и вместе с тем наиболее общих форм движения материи.

Физические законы устанавливаются на основе опытных данных и выражают объективные закономерности, существующие в природе. Поскольку опытные данные всегда ограничены как по точности проведенных измерений, так и по области изменения физических величин, каждый физический закон имеет определенную область применимости. Физические законы, имеющие наиболее обширные области применимости, называются фундаментальными (например, законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, законы Ньютона, закон Кулона). В принципе, небольшого количества наиболее фундаментальных законов достаточно для объяснения и предсказания хода почти всех физических (и технических) процессов, однако математически такое решение может оказаться невероятно громоздким, а потому недопустимым.

Практикум включает в себя шестнадцать практических занятий, каждое из которых содержит основные понятия и формулы, используемые для решения приведенных здесь же задач. Расположенный в конце издания список рекомендуемой литературы содержит материал, способствующий более глубокому пониманию теоретических основ рассматриваемых в рамках практикума физических закономерностей и явлений [1–35].

Помимо этого в практикум включены примеры с подробно разобранными решениями типовых задач различного уровня сложности по соответствующей теме. Приведенные в конце каждого занятия вопросы и задания для самопроверки могут быть использованы при самостоятельном изучении дисциплины. Стоит отметить, что к самостоятельному решению задач следует преступать только после ответов на контрольные вопросы, что в свою очередь позволит обучающимся самим оценить уровень их знаний по соответствующей теме.

Как правило, при решении конкретной задачи встает вопрос о том, какие из многочисленных явлений и свойств необходимо учитывать, а какими можно пренебречь. Иначе говоря, встает вопрос о модели − упрощенной копии исследуемой реальной физической системы.

В зависимости от условий каждой конкретной задачи для описания движения тел в физике пользуются различными приближенными моделями.

Материальная точка – тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Всякое тело можно разбить на большое количество сколь угодно малых по сравнению с его размерами частей – систему материальных точек.

Абсолютно твердое тело – тело, расстояния между точками которого можно считать постоянными.

Непосредственно при решении задач рекомендуется придерживаться следующего порядка действий:

1. Внимательно прочитать условие задачи и сделать краткую запись условия, включая табличные величины и константы, явно не указанные в тексте задачи.

2. Выразить все заданные величины в единицах СИ (прил. А).

3. Установить, какие физические явления и законы лежат в основе содержания данной задачи.

4. Сделать рисунок, поясняющий содержание задачи, с указанием всех необходимых величин.

5. Решить задачу в общем виде, т. е. получить расчетную формулу в виде уравнения или системы уравнений, включающих в себя как заданные, так и искомые величины.

6. Подставить в расчетную формулу числовые значения величин и вычислить искомую физическую величину.

7. Проверить правильность размерности найденной физической величины и проанализировать полученный ответ.

В целом умение решать задачи является лучшим критерием оценки глубины изучения теоретического материала и его усвоения.

Практическое занятие № 1

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями, используемыми при описании движения материальной точки, и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Кинематика описывает движение тел, не рассматривая причины, вызвавшие это движение. Положение каждой точки в декартовой системе (рис. 1.1) определяется либо ее координатами x, y, z, либо с помощью проведенного из начала координат в данную точку *радиус-вектора*:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

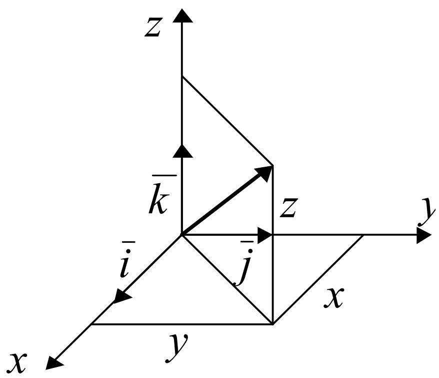

Рис. 1.1. Декартова система координат

Изменение положения точки – механическое движение – происходит во времени, которое всегда изменяется от прошлого к будущему и отсчитывается часами от произвольно выбираемого начального момента времени. При движении точки ее координаты со временем меняются. Уравнения движения материальной точки можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

или

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t).$$

Линия, по которой движется материальная точка, называется траекторией. Быстрота движения и его направление в данный момент времени определяются векторной физической величиной – скоростью $\vec{\upsilon}$. Вектор средней скорости и мгновенной скорости

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad \vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Полное ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

и его разложение на тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие (рис. 1.2) могут быть представлены в форме:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \; a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

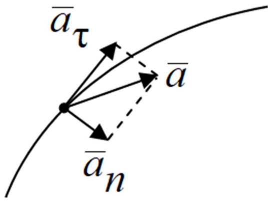

Рис. 1.2. Нормальная и тангенциальная составляющие ускорения

Уравнения одномерного равнопеременного движения имеют вид:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at.$$

Равномерное движение можно рассматривать как частный случай равнопеременного движения с равным нулю ускорением.

Траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту, рассчитывается с помощью уравнений:

$$x = x_0 + \upsilon_0 \cos\alpha t,$$

$$y = y_0 + \upsilon_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha,$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha t - gt.$$

Вращательное движение гораздо удобнее рассматривать не с помощью декартовых координат, а с помощью полярных (сферических) координат, когда положение точки на окружности задается углом φ. Угловая скорость ω и угловое ускорение определяются соотношениями

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Связь линейных и угловых величин при вращательном и криволинейном движении может быть представлена следующим образом:

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right], \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1-1. Зависимость пройденного телом пути *s* от времени *t* дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}14\ \text{м/с}^2$ и $D = 0{,}01\ \text{м/с}^3$. Через какое время τ после начала движения ускорение тела будет равно $1\ \text{м/с}^2$? Чему равно среднее ускорение тела за этот промежуток времени?

Р е ш е н и е. Согласно формулам для скорости и ускорения точки в произвольный момент времени *t* запишем:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2,$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2C + 6Dt.$$

По условию задачи в момент времени $t = \tau$ ускорение *a* равно

$$a = 2C + 6D\tau.$$

Откуда искомое время

$$\tau = \frac{a - 2C}{6D} = 12\ \text{с}.$$

Для нахождения среднего ускорения за промежуток времени τ, которое определяется соотношением

$$a_{\text{ср}} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\tau},$$

надо знать не только значение скорости в конечный момент времени при $t = \tau$, равное

$$\upsilon = B + 2C\tau + 3D\tau^2,$$

но и ее значение υ_0 в начальный момент при $t = 0$, которое равно $\upsilon_0 = B$. Следовательно, среднее ускорение

$$a_0 = 2C + 3D\tau = 0{,}64 \text{ м/с}^2 .$$

Задача 1-2. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время $\tau = 0{,}5$ с на расстоянии $l = 5$ м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h был брошен камень? С какой скоростью υ_0 он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Р е ш е н и е. Траектория движения камня представлена на рис. 1.3.

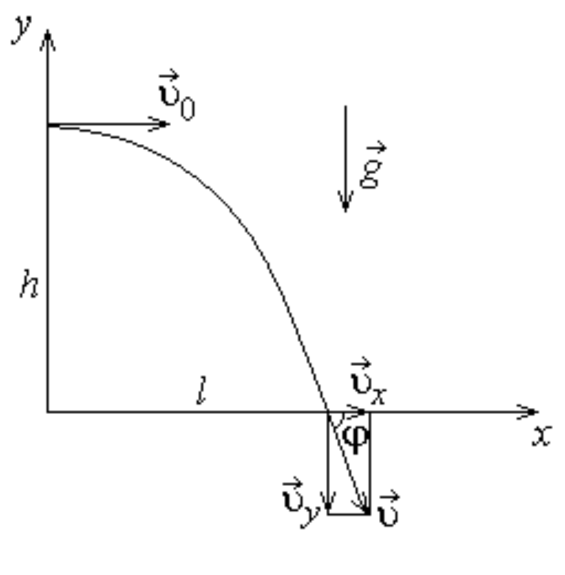

Рис. 1.3. К задаче 1-2

С учетом того, что движение по оси x является равномерным, а по оси y – равноускоренным, запишем уравнения движения камня:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t, \\ y = h - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

По прошествии времени $\tau = 0,5$ с камень окажется в нижней точке с координатами $x = l$, $y = 0$, следовательно:

$$\begin{cases} l = \upsilon_0 \tau; \\ 0 = h - \dfrac{g\tau^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда для скорости υ_0 и высоты h имеем:

$$\begin{cases} \upsilon_0 = \dfrac{l}{\tau} = 10 \text{ м/с}; \\ h = \dfrac{g\tau^2}{2} = 1,25 \text{ м}. \end{cases}$$

Для определения конечной скорости υ найдем ее проекции на оси x и y. Поскольку движение вдоль оси x является равномерным, $\upsilon_x = \upsilon_0$, а вдоль оси y – равноускоренным (с нулевой начальной скоростью), $\upsilon_y = -gt$. Используя теорему Пифагора, для скорости в точке падения на землю имеем:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\tau^2} = 11,18 \text{ м/с}.$$

Угол φ может быть найден как

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{g\tau}{\upsilon_0}\right) = \operatorname{arctg} 0,5 = 26^\circ 30'.$$

Задача 1-3. Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с. Определите угол α, который составит с вертикалью вектор скорости камня через $\tau = 3$ с после начала движения, а также тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения камня в этот момент.

Решение. Траектория движения тела изображена на рис. 1.4. Изменение проекций скорости на координатные оси описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0, \\ \upsilon_y = -gt. \end{cases}$$

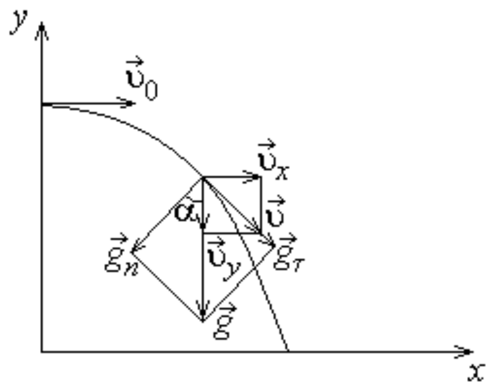

Рис. 1.4. К задаче 1-3

Заметим, что кроме вектора скорости на рис. 1.4 представлен вектор полного ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ и его разложение на тангенциальную $\vec{g}_\tau$ и нормальную $\vec{g}_n$ составляющие, тогда искомый угол

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \mathrm{arctg}\frac{gt}{\upsilon_0} = \mathrm{arctg}2,45.$$

Соответственно, тангенциальная и нормальная составляющие ускорения будут равны:

$$g_n = g\cos\alpha = \frac{g\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\tau^2}} = 3,7\ \text{м}/\text{с}^2,$$

$$g_\tau = g\sin\alpha = \frac{g^2\tau}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\tau^2}} = 9,1\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Задача 1-4. Тело брошено с высоты $h = 2$ м под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Определите, на какой высоте и с какой скоростью движется тело через τ = 1,5 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Траектория движения тела представлена на рис. 1.5.

Уравнения, которым подчиняются координаты и проекции скорости тела, имеют вид:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cos\alpha t; \\ y = h + \upsilon_0 \sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt. \end{cases}$$

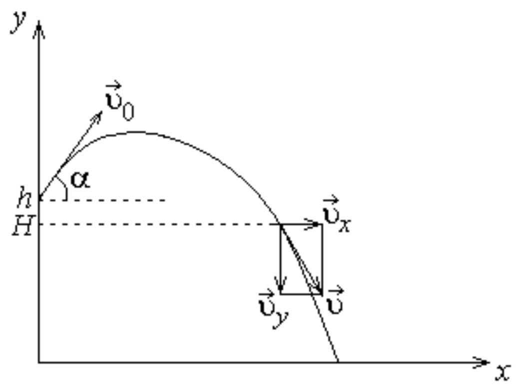

Рис. 1.5. К задаче 1-4

Через время $\tau = 1{,}5$ с после начала движения тело будет находиться на высоте $H = y(\tau)$:

$$H = h + \upsilon_0 \sin\alpha\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 17 \text{ м}.$$

Полная скорость в этот момент будет равна

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 \sin\alpha \cdot g\tau + g^2\tau^2} = 10{,}3 \text{ м/с}.$$

Задача 1-5. Вал радиусом $R = 0{,}1$ м начинает вращение из положения покоя и за время $t = 10$ с совершает $N = 50$ оборотов. Считая движение вала равноускоренным, определите угловое ускорение вала, угловую и линейную конечную скорости точек его поверхности, а также их полное ускорение.

Решение. Уравнение движения произвольной точки на поверхности вала имеет вид:

$$\varphi = 2\pi N = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

при этом угловая скорость изменяется согласно уравнению

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t.$$

Решая эти уравнения совместно, получим:

$$\omega = \frac{4\pi N}{t} = 62{,}8 \text{ рад/с},$$

$$\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2} = 6{,}28 \text{ рад/с}.$$

Линейная скорость точек вала равна $\upsilon = \omega R = 6{,}28$ м/с, следовательно, нормальное ускорение этих точек $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 394$ м/с^2, а полное ускорение с учетом соотношения $a_\tau = \varepsilon R$ составит

$$a = \sqrt{a_n^2 + \varepsilon^2 R^2} = 394 \text{ м/с}^2 .$$

Задача 1-6. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Определите, через какое время после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангеннциальному; б) вдвое больше тангенциального? Вычислите угол φ между вектором полного ускорения и радиусом при $a_n = a_\tau$.

Решение. Тангенциальное ускорение задает изменение скорости по величине $a_\tau = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$. Поскольку начальная скорость точки равна нулю, ее конечная скорость $\upsilon = a_\tau t$.

Согласно формуле

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{a_\tau^2 t^2}{R}$$

нормальное ускорение с ростом скорости увеличивается. Поэтому при $a_n = a_\tau$

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = 2 \text{ с}.$$

При $a_n = 2a_\tau$

$$t = t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = 2{,}8 \text{ с}.$$

Угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом (рис. 1.6), найдем из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_\tau}{a_n} = 1,$$

откуда φ = 45°.

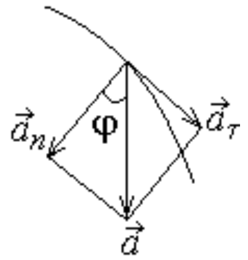

Рис. 1.6. К задаче 1-6

Вопросы и задания для самостоятельного решения

1.1. Что называется материальной точкой? В каких ситуациях может использоваться это понятие?

1.2. Что такое радиус-вектор, и какими величинами он характеризуется в декартовой системе координат?

1.3. Как определяются векторы средней и мгновенной скорости, и куда они направлены? Как связаны проекции вектора скорости и производные от соответствующих координат?

1.4. Что описывают уравнения движения материальной точки? Какой вид имеют уравнения движения для точки, движущейся равномерно?

1.5. Как определяется вектор ускорения, и что он характеризует? Как связаны проекции вектора ускорения и производные от соответствующих координат?

1.6. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? Чему она равна?

1.7. Что характеризует нормальная составляющая ускорения? Чему она равна?

1.8. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение, тангенциальное ускорение? По какой траектории движется материальная точка в этих случаях?

1.9. Какой вид имеют уравнения движения материальной точки, движущейся равномерно? Как меняется скорость в таком движении?

1.10. О чем говорит принцип независимости движений? Приведите пример, где он может быть использован.

1.11. Какими уравнениями описывается движение тела, брошенного под углом к горизонту?

1.12. Как меняются векторы скорости и ускорения тела, брошенного под углом к горизонту?

1.13. Как определяются векторы угловой скорости и углового ускорения? Как они направлены?

1.14. Какова связь между линейной и угловой скоростью?

1.15. Какими уравнениями описывается равнопеременное вращение тела?

1.16. Зависимость пройденного телом пути s от времени описывается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $A = 6$ м, $B = 3$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найдите среднюю скорость υ и среднее ускорение a тела для интервала времени $1 \le t \le 4$ с.

1.17. Зависимость пройденного телом пути s от времени t описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м, $B = 2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найдите среднюю скорость υ и среднее ускорение a тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

1.18. Зависимость пройденного телом пути s от времени t описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}1$ м/с^2 и $D = 0{,}03$ м/с^3. Через какое время после начала движения тело будет иметь ускорение $a = 2$ м/с^2? Найдите среднее ускорение тела $\langle a \rangle$ за этот промежуток времени.

1.19. Радиус-вектор точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$. По какому закону изменяются скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ этой точки? Найдите модуль скорости и ускорения в момент $t = 2$ с.

1.20. Точка движется со скоростью $\vec{\upsilon} = bt(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$, где $b = 1$ м/с^2. Найдите скорость точки и ее модуль в момент времени $t = 1$ с, а также ускорение точки и его модуль.

1.21. Уравнения движения двух материальных точек имеют вид (длина – в м, время – в с): $x_1 = 20 + 2t - 4t^2$ и $x_2 = 2 - 16t + 10t^2$. В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковыми? Чему равны скорости и ускорения точек в этот момент?

1.22. Первую половину времени своего движения велосипедист двигался со скоростью $\upsilon_1 = 20$ км/ч, а вторую половину – со скоростью $\upsilon_2 = 40$ км/ч. Определите среднюю скорость велосипедиста.

1.23. Первую половину своего пути велосипедист двигался со скоростью $\upsilon_1 = 20$ км/ч, а вторую половину – со скоростью $\upsilon_2 = 40$ км/ч. Определите среднюю скорость велосипедиста.

1.24. Катер идет по реке из города A в город B со скоростью $\upsilon_1 = 15$ км/ч относительно берега, а обратно – со скоростью $\upsilon_2 = 25$ км/ч. Определите скорость течения реки, среднюю $\upsilon_{ср}$ и собственную υ_0 скорости катера.

1.25. Вам нужно перебраться через реку шириной $L = 50$ м с бурным течением. Ваша максимальная собственная скорость $\upsilon = 3$ км/ч. Во время переправы течение сносит вас на расстояние $l = 30$ м вдоль береговой линии. Определите, под каким углом к берегу вам нужно плыть для того, чтобы переправиться на другой берег за кратчайшее время? Чему равно это время? Рассчитайте скорость течения реки u.

1.26. Камень падает с высоты $h = 20$ м без начальной скорости. Какой путь пройдет камень за первую, вторую и n-ю секунду падения?

1.27. Над колодцем глубиной $h = 10$ м вертикально вверх бросают камень с начальной скоростью $\upsilon_0 = 14$ м/с. Запишите уравнение движения камня. Определите время падения камня на дно колодца и величину его конечной скорости.

1.28. Первое тело бросили вертикально вверх с высоты $h_1 = 10$ м, а второе в тот же момент времени – горизонтально с высоты $h_2 = 20$ м. Определите начальную скорость первого тела υ_0, если известно, что оба тела упали на землю одновременно.

1.29. Некоторое тело бросили под углом α к горизонту. Определите этот угол, если известно, что максимальная высота подъема этого тела меньше дальности полета в два раза. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1.30. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите угол α, под которым тело брошено к горизонту, если максимальная высота подъема тела составляет $1/4$ дальности его полета.

1.31. Камень, брошенный со скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, упал на землю на расстоянии l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости υ_0 он упал на то же место?

1.32. Наибольшая высота подъема тела, брошенного с уровня земли под углом α к горизонту со скоростью $\upsilon = 20$ м/с, составляет $H = 15$ м. Найдите угол, под которым оно было брошено, и расстояние по горизонтали от точки бросания до точки падения.

1.33. С башни высотой $h = 25$ м бросили камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите в течение какого времени камень будет в движении. На каком расстоянии от основания башни он упадет на землю? Рассчитайте скорость падения камня на землю и угол φ, который составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1.34. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найдите нормальное и тангенциальное ускорения тела через $t = 1{,}25$ с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1.35. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найдите радиус кривизны траектории тела через $t = 1$ с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1.36. Тело брошено со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Найдите величины υ_0 и α, если известно, что наибольшая высота подъема $h = 3$ м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории $R = 3$ м. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1.37. Снаряд вылетает из дула орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 600$ м/с. Определите, через какое время снаряд будет находиться на высоте $h = 400$ м и какова будет его скорость в этот момент. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1.38. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $r = 12{,}5$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ см/с^2. Определите, в какой момент времени вектор ускорения образует с вектором скорости угол $\alpha = 45°$. Какой путь пройдет за это время движущаяся точка?

1.39. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Определите радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 4{,}5$ м/с^2.

1.40. Точка начала двигаться равноускоренно по окружности радиуса $R = 1$ м и прошла за время $t_1 = 10$ с путь $S = 50$ м. С каким центростремительным ускорением a_n двигалась точка спустя время $t_2 = 5$ с после начала движения?

1.41. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найдите нормальное ускорение a_n точки через $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки составила $\upsilon = 79{,}2$ см/с.

1.42. Колесо радиусом $R = 10$ см вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3{,}14$ рад/с^2. Для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения найдите: а) угловую ω и линейную υ скорости; б) тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения; в) угол δ, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.

1.43. Найдите угловое ускорение колеса, если известно, что через $t = 2$ с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением линейной скорости этой точки.

1.44. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$, где $A = 2$ рад/с^2, $B = 1$ рад/с^5. Определите полное ускорение точек обода колеса через $\tau = 1$ с после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время.

1.45. Тело вращается вокруг неподвижной оси по следующему закону: $\varphi = 5 + 10t + 4t^2$. Найдите модуль полного ускорения a точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения для момента времени $t_0 = 0{,}5$ с. Какой угол α составляет вектор полного ускорения с нормалью к траектории в этот момент времени?

1.46. Два диска, расположенные на одной оси, приводятся в быстрое вращение с постоянной угловой скоростью. Частота вращения $\nu = 100$ об/с. Пуля пробивает последовательно два диска. Определите скорость пули, если пробоина от пули во втором диске смещена относительно пробоины в первом диске на угол $\varphi = 36°$, а расстояние между дисками составляет $d = 0{,}45$ м.

1.47. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = At$, где $A = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\alpha = 60°$ с ее вектором скорости?

1.48. Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ см. Зависимость пути от времени описывается уравнением $x = Ct^3$, где $C = 0{,}1\ \text{см}/\text{с}^3$. Найдите нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда линейная скорость равна $\upsilon = 0{,}3\ \text{м}/\text{с}$.

1.49. Точка начала двигаться по окружности радиусом 0,6 м с тангенциальным ускорением $0{,}1\ \text{м}/\text{с}^2$. Найдите нормальное и полное ускорения в конце третьей секунды после начала движения и угол между векторами полного и нормального ускорений в этот момент.

1.50. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени описывается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 2\ \text{рад}/\text{с}$ и $C = 1\ \text{рад}/\text{с}^3$. Для точек, лежащих на ободе колеса, через $\tau = 2$ с после начала движения найдите: угловую и линейную скорости; угловое, тангенциальное и нормальное ускорения.

1.51. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени описывается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1\ \text{рад}/\text{с}$, $C = 1\ \text{рад}/\text{с}^2$ и $D = 1\ \text{рад}/\text{с}^3$. Найдите радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2\ \text{м}/\text{с}^2$.

1.52. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $B = -2\ \text{м}/\text{с}$ и $C = 1\ \text{м}/\text{с}^2$. Найдите линейную скорость точки, ее тангенциальное, нормальное и полное ускорения через $t = 3$ с после начала движения, если известно, что нормальное ускорение точки при $t' = 2$ с равно $a_n = 0{,}5\ \text{м}/\text{с}^2$.

1.53. Автомобиль движется по закруглению шоссе, радиус кривизны которого равен $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = 10\ \text{м}/\text{с}$, $C = -0{,}5\ \text{м}/\text{с}^2$. Найдите скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени $t = 5$ с.

1.54. Диск радиусом $R = 0{,}1$ м вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени описывается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($B = 1\ \text{рад}/\text{с}$, $C = 1\ \text{рад}/\text{с}^2$, $D = 1\ \text{рад}/\text{с}^3$). Определите тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения.

1.55. Тело вращается вокруг неподвижной оси по следующему закону: $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$. Найдите по величине и направлению полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения для момента времени $t = 4$ с.

1.56. Материальная точка совершает движение, которое описывается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}2\ \text{м}/\text{с}^2$, $D = 0{,}1\ \text{м}/\text{с}^3$. Определите через какой промежуток времени после начала движения ускорение тела станет равным $a = 1\ \text{м}/\text{с}^2$ и среднее ускорение тела $\langle a \rangle$ за этот промежуток времени.

1.57. Точка движется по окружности радиуса $r = 5$ м. Нормальное ускорение точки при этом описывается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^3$, где $A = 1\ \text{м}/\text{с}^2$, $B = 6\ \text{м}/\text{с}^3$, $C = 9\ \text{м}/\text{с}^4$. Определите: тангенциальное ускорение точки a_τ; путь s, пройденный точкой за время $t_1 = 3$ с после начала движения; полное ускорение a в момент времени $t_2 = 1$ с.

1.58. После выключения вентилятор за $t = 5$ с сделал $N = 20$ оборотов и остановился. Считая это движение равнозамедленным, определите: угловую скорость вентилятора ω; угловое ускорение ε; частоту вращения вентилятора ν в рабочем режиме.

1.59. Точка движется по окружности радиуса $R = 12$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5\ \text{м}/\text{с}^2$. Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангенциальному $(a_n = a_\tau)$; б) втрое больше тангенциального $(a_n = 3a_\tau)$.

1.60. Найдите линейную скорость υ и центростремительное ускорение a точек на экваторе и широте $\varphi = 60°$. Радиус земли примите равным $R = 6400$ км.

Практическое занятие № 2

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями, используемыми при описании физических воздействий, оказываемых на материальное тело и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

В качестве количественной характеристики инертности и способности данного тела взаимодействовать с другими телами в соответствии с законом всемирного тяготения используется величина, называемая массой m тела. Вводится также импульс тела $\vec{p}$, определяемый соотношением $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Векторная величина – сила $\vec{F}$ – определяется, как количественная характеристика взаимодействий, в которых участвует тело. Если на материальную точку одновременно действует несколько сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, … $\vec{F}_n$), то каждая из них ведет себя так, как будто бы других сил не существует. В этом заключается установленный опытным путем принцип независимости действия сил. Все силы могут быть заменены одной силой $\vec{F}_\Sigma$, называемой равнодействующей силой, равной их векторной сумме:

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \sum \vec{F}_i .$$

Основная задача динамики заключается в применении законов механического движения (законов Ньютона), позволяющих провести расчет изменения скорости (импульса) под влиянием приложенных к телу сил, при воздействии которых тело приобретает ускорение. В частности, второй закон Ньютона имеет вид:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_\Sigma}{m}, \quad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}_\Sigma.$$

В механике результирующая сила $\vec{F}_\Sigma$ обычно слагается из гравитационной силы $G = \gamma\frac{mM}{R^2}$ или (конкретно) силы тяжести $F_{\text{тяж}} = \gamma\frac{mM_З}{R_З^2} = mg$ тела в гравитационном поле Земли, силы реакции опоры $\vec{N}$, силы натяжения нити $\vec{T}$, силы тяги $\vec{F}_{\text{тяги}}$, силы трения $\vec{F}_{\text{тр}} = \mu N$ и силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}$.

Таким образом, при решении задач механики удобнее пользоваться другой формой записи второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \ldots$$

Стоит отметить, что в каждом конкретном случае должны учитываться только те силы, которые приложены к рассматриваемому телу. В случае отсутствия внешних сил (в замкнутых системах) полный импульс системы сохраняется:

$$\vec{p} = \sum m_i\vec{\upsilon}_i = \text{const},$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c = \sum m_i\vec{\upsilon}_i,$$

где $\vec{\upsilon}_c$ – скорость центра масс.

Примеры решения типовых задач

Задача 2-1. Тело массой $m = 1$ кг движется по вертикальной стене. К телу приложена направленная под углом $\alpha = 30°$ к вертикали сила $F = 20$ Н. Коэффициент трения между телом и стеной $\mu = 0{,}1$. Определите ускорение тела a.

Решение. Расстановка действующих на тело в рассматривамом случае сил показана на рис. 2.1: сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально вниз, сила реакции опоры $\vec{N}$ направлена перпендикулярно поверхности, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена в сторону, противоположную движению. Правильный выбор направления силы трения связан с выбором направления движения тела, которое в данном случае определяется ускорением тела $\vec{a}$.

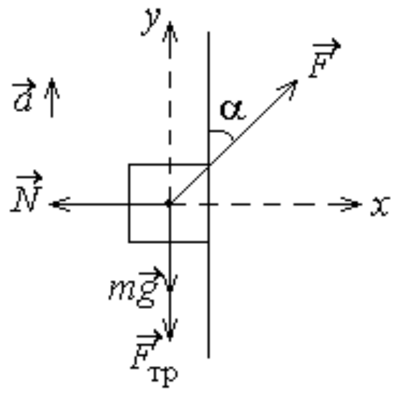

Рис. 2.1. К задаче 2-1

Если в ходе решения задачи будет получено положительное значение ускорения, задача решена правильно и не требует корректировки. Отрицательное значение ускорения говорит о неправильном выборе не только направления ускорения, но и силы трения, а значит, задача с учетом данного факта должна быть решена заново.

Движение рассматриваемого тела описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}, \; F_{\text{тр}} = \mu N.$$

В проекциях на координатные оси x и y (рис. 2.1) векторное уравнение преобразуется в два скалярных:

$$\begin{cases} 0 = F\sin\alpha - N, \\ ma = -mg + F\cos\alpha - \mu N. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $N = F\sin\alpha$, поэтому для расчета ускорения получим следующее соотношение:

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m - g} = 6{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение имеет положительный знак, значит, тело действительно движется вверх, а сила трения направлена вниз, как показано на рис. 2.1.

Задача 2-2. Тело скользит равномерно по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. Чему равен коэффициент трения? С каким ускорением будет двигаться тело по наклонной плоскости, если коэффициент трения уменьшить в два раза?

Решение. На тело, лежащее на наклонной плоскости (рис. 2.2), кроме силы тяжести $m\vec{g}$ действуют сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, модуль которой с коэффициентом трения связан соотношениям $F_{\text{тр}}=\mu N$. Второй закон Ньютона для тела записывается в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

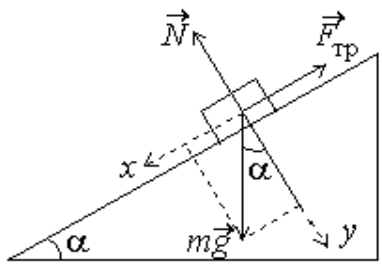

Рис. 2.2. К задаче 2-2

Так как тело двигается вдоль плоскости вниз, его ускорение также направлено вниз или равно нулю в случае равномерного движения. Следовательно, в первом случае равномерного движения

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0.$$

В проекциях на координатные оси x (вдоль плоскости) и y (перпендикулярно плоскости) это векторное уравнение преобразовывается в два скалярных:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N = 0, \\ mg\cos\alpha - N = 0. \end{cases}$$

Отсюда сила реакции опоры находится как $N = mg\cos\alpha$, а для коэффициента трения μ имеем:

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58.$$

Если коэффициент трения уменьшить в два раза, т. е. $\mu = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$, тело станет двигаться равноускоренно, а его движение будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - \mu N, \\ 0 = mg\cos\alpha - N. \end{cases}$$

Для ускорения в этом случае получим:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g\left(\sin\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}g\sin\alpha = \frac{1}{4}g = 2{,}5 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Задача 2-3. Брусок скользит вдоль наклонной плоскости (рис. 2.2). Угол наклона плоскости равен $\alpha = 45°$, коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}3$. Определите, за какое время t брусок пройдет вторую половину своего пути, если весь путь равен l = 5 м.

Решение. Второй закон Ньютона с учетом того, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, в проекциях на оси дает выражения:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - \mu N, \\ 0 = mg\cos\alpha - N. \end{cases}$$

Из полученных уравнений выразим ускорение

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Поскольку $l = at^2/2$, время прохождения бруском всей плоскости

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

Время, затраченное на прохождение первой половины пути:

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

Тогда искомое время

$$t = t_0 - t_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

При подстановке соответствующих числовых значений получим t = 0,42 с.

Задача 2-4. Две гири массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок (машина Атвуда). Найдите натяжение нити и ускорение, с которым движутся гири. Трением в блоке пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система изображена на рис. 2.3. Два тела, связанные нерастяжимой нитью, движутся с одинаковыми ускорениями, но их направления будут различны. Сила натяжения нитей $\vec{T}$, согласно третьему закону Ньютона, также одинакова для обоих тел, если блок невесомый.

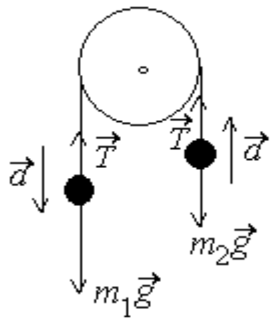

Рис. 2.3. К задаче 2-4

Второй закон Ньютона в векторной форме и в проекциях на оси имеет вид:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}, \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 a = m_1 g - T, \\ m_2 a = T - m_2 g. \end{cases}$$

Решив эти уравнения, получим:

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 3{,}3 \ \text{м}/\text{с}^2,$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 13{,}3 \ \text{Н}.$$

Задача 2-5. В вагоне, двигающемся горизонтально с ускорением $a = 5{,}7 \ \text{м}/\text{с}^2$, на шнуре висит груз массой $m = 200$ г. Найдите силу натяжения шнура и угол отклонения шнура от горизонтали.

Решение. Пусть вагон с подвешенным на шнуре грузом движется с ускорением слева направо, как показано на рис. 2.4. В этом случае к грузу приложены две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона в данном случае запишем в виде

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

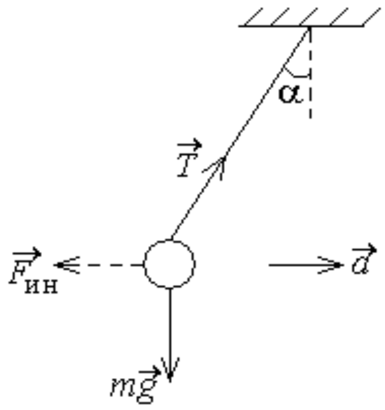

Рис. 2.4. К задаче 2-5

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси будем иметь:

$$\begin{cases} T\sin\alpha = ma, \\ T\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

Отсюда для угла α и силы натяжения T шнура получим:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} = \operatorname{arctg}\ 0,58 \approx 30°,$$

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2} \approx 2,27\ \text{Н}.$$

Отметим, что для решения этой задачи использовалась инерциальная система отсчета, связанная с неподвижной землей. Решим также эту задачу в неинерциальной системе, связанной с движущимся вагоном. Относительно вагона ускорение груза равно нулю. Однако для правильного написания второго закона Ньютона в этом случае необходимо ввести силу инерции:

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}\,.$$

Направление этой силы указано пунктиром на рис. 2.4. С учетом вышесказанного второй закон Ньютона примет вид:

$$0 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ин} \text{ или } 0 = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}\,.$$

Так как это уравнение эквивалентно рассмотренному ранее, дальнейший ход решения не меняется.

Задача 2-6. Гирька массой $m = 0{,}1$ кг, привязанная к нити длиной $l = 0{,}3$ м, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом $R = 0{,}15$ м. Определите натяжение нити и угловую скорость вращения гирьки.

Р е ш е н и е. Второй закон Ньютона, описывающий движение гирьки (рис. 2.5), имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$

причем ускорение является нормальным:

$$a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R\,.$$

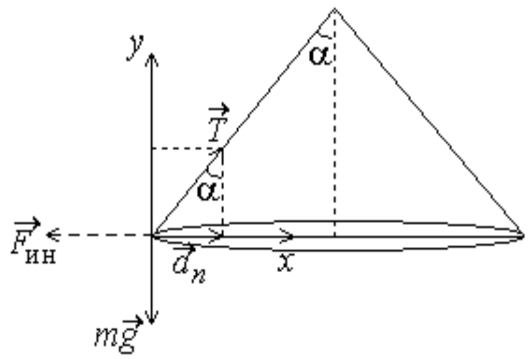

Рис. 2.5. К задаче 2-6

В проекциях на координатные оси получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{R} = T\sin\alpha = m\omega^2 R, \\ 0 = T\cos - mg, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\alpha = \dfrac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R, \\ T\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

Угол α определим через R и l:

$$\sin\alpha = \frac{R}{l} = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = 30°.$$

Сила натяжения

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}}} = \frac{2mg}{\sqrt{3}} = 1{,}2 \text{ Н.}$$

Найдем угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{ml}} = 6{,}3 \text{ рад/с.}$$

Отметим, что эта задача решена в инерциальной системе отсчета, связанной с землей. Задача может быть решена также с использованием неинерциальной системы отсчета, связанной с движущейся гирькой. Эта система вращается с той же угловой скоростью, что и гирька, причем последняя в этой системе неподвижна $(\vec{a} = 0)$. Для правильного решения этой задачи введем силу инерции:

$$F_{\text{ин}} = m\omega^2 R\,.$$

Направление этой силы указано пунктиром на рис. 2.5. Заметим, что проекция этой силы на ось *x* отрицательна. Таким образом, в неинерциальной системе отсчета второй закон Ньютона запишем в виде:

$$0 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ин}} \text{ или } 0 = m\vec{g} + \vec{T} + m\omega^2\vec{R}\,.$$

Так как это уравнение эквивалентно рассмотренному выше, дальнейший ход решения не меняется.

Задача 2-7. Шарик, имеющий массу m = 0,03 кг, подвешен на тонкой нити и отклонен на угол $\alpha = 60^\circ$ от вертикали. Найдите силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая система изображена на рис. 2.6. В момент прохождения положения равновесия тангенциальная составляющая ускорения равна нулю, и поэтому $a = a_n$. Таким образом, для нижней точки второй закон Ньютона запишем в виде:

$$m\vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{T}.$$

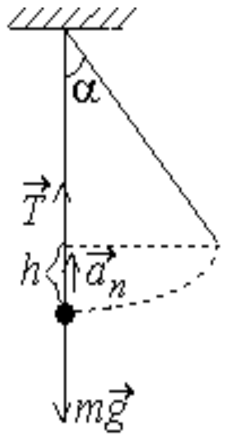

Рис. 2.6. К задаче 2-7

В проекциях на вертикальную ось:

$$\frac{m\upsilon^2}{l} = T - mg\,.$$

Для определения силы натяжения T рассчитаем скорость, приобретаемую телом к данному моменту. Найдем ее, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$mgh = mg(l - l\cos\alpha) = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

$$\upsilon^2 = 2gl(1 - \cos\alpha).$$

Тогда для силы натяжения T получим:

$$T = mg + \frac{m}{l}2gl(1 - \cos\alpha) = 3mg - 2mg\cos\alpha = 0{,}6 \text{ Н}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

2.1. Что утверждает первый закон Ньютона?

2.2. Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна?

2.3. Что такое масса, и что она характеризует?

2.4. Что такое сила, и какими величинами она определяется?

2.5. Чем определяется сила тяжести, и куда она направлена?

2.6. Какие виды сил чаще всего встречаются в механике? Куда они направлены?

2.7. Что такое равнодействующая сила, и как она может быть найдена?

2.8. Запишите второй закон Ньютона.

2.9. В чем заключается принцип независимости действия сил?

2.10. Что утверждает третий закон Ньютона? Могут ли силы взаимодействия уравновешивать друг друга?

2.11. Что называется центром инерции системы? Как записывается закон движения центра инерции?

2.12. Какие системы отсчета называются неинерциальными? Можно ли применять для них законы динамики?

2.13. Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?

2.14. Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?

2.15. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? В каких случаях они проявляются?

2.16. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением $a_1 = 2\ \text{м}/\text{с}^2$, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разрывается. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась?

2.17. Во время движения на автомобиль массой $m = 10^3$ кг действует сила трения. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Чему должна быть равна сила тяги, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: а) равномерно; б) с ускорением $a = 2\ \text{м}/\text{с}^2$?

2.18. Тело массой $m = 100$ кг перемещают равномерно вверх по плоской поверхности, прилагая силу, направленную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите величину этой силы, если коэффициент трения $\mu = 0{,}3$.

2.19. Тело массой $m = 10$ кг лежит на горизонтальном шероховатом столе. Коэффициент трения между телом и столом $\mu = 1{,}5$. На тело начинает действовать сила под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Модуль силы меняется по закону $F = at$, где $a = 0{,}5$ м/с. Через какой промежуток времени после начала действия силы тело начнет движение?

2.20. К гладкой вертикальной стене привязана нить длиной $l = 6$ см. К нити подвешен шар массой $m = 0{,}5$ кг и радиусом $R = 5$ см. Найдите силу давления шара на стену.

2.21. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 4°$. При каком предельном коэффициенте трения k тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения $k = 0{,}03$? Какое время t потребуется для прохождения при этих условиях пути $s = 100$ м? Какую скорость υ будет иметь тело в конце этого пути?

2.22. Движение материальной точки описывается уравнением $r = A\sin\omega t + A\cos\omega t$. Масса материальной точки $m = 0{,}2$ кг, коэффициент $A = 2$ м, угловая скорость $\omega = 0{,}7$ рад/с. Определите путь s, пройденный точкой за время $t_1 = 10$ с, и силу F, действующую на точку в конце указанного интервала времени.

2.23. К нити подвешен груз массой m. Определите силу натяжения нити T, если груз с ускорением a: а) поднимается вверх; б) опускается вниз.

2.24. Тело скользит равномерно по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. Чему равен коэффициент трения? С каким ускорением будет двигаться тело по наклонной плоскости, если коэффициент трения уменьшить в два раза?

2.25. Во время движения на автомобиль массой $3 \cdot 10^3$ кг действует сила трения. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Определите мощность, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью $\upsilon = 36$ км/ч: а) в гору; б) под гору. Уклон горы $\alpha = 4°$.

2.26. Аэростат массой $m = 300$ кг равномерно опускается вниз. Для того чтобы он стал равномерно подниматься вверх, необходимо сбросить балласт массой m_x. При подъемной силе $F = 2{,}5$ кН рассчитайте массу балласта.

2.27. Лыжник массой m равномерно поднимается в гору, имеющую уклон 1 м на каждые 25 м пути. При этом сила трения лыж о снег составляет 5 % от силы тяжести. Рассчитайте развиваемую лыжником силу тяги.

2.28. Невесомый блок укреплен на конце стола. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Груз массой m_1 находится на столе, груз массой m_2 – в подвешенном состоянии. Коэффициент трения между столом и первым грузом равен k. Определите ускорение, с которым будут двигаться грузы, и силу натяжения нити.

2.29. На горизонтально расположенной доске неподвижно лежит предмет. Доску приподнимают с одного края до тех пор, пока при некотором угле наклона α предмет не начнет скользить по ней. Определите коэффициент трения предмета о доску k.

2.30. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается с него и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 25 % всей его длины. Чему равен коэффициент трения k каната о стол?

2.31. Автомобиль начинает движение с ускорением a. При этом горизонтальная поверхность бензина в его баке наклоняется на угол α к горизонту. Определите этот угол.

2.32. На внутренней поверхности сферы радиусом $R = 0{,}1$ м, вращающейся вокруг вертикальной оси, находится небольшой предмет. С какой постоянной частотой должна вращаться сфера, чтобы предмет находился в точке, направление на которую составляет угол $\delta = 45°$? Коэффициент трения между предметом и поверхностью сферы равен $\mu = 0{,}2$.

2.33. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью $\upsilon_1 = 20$ м/с и ускорением $a_1 = 13$ м/с^2. После удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с. Каково ускорение a_2 мяча сразу после удара?

2.34. Человек, сидящий в лодке, бросает камень вдоль нее под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Масса камня m = 10 кг, масса человека и лодки M = 100 кг, начальная скорость камня относительно берега $\upsilon_1 = 10$ м/с. Найдите расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснется воды. Считайте, что во время полета камня лодка движется равномерно.

2.35. Через невесомый блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. На второй из грузов положен перегрузок массой m_3 = 0,5 кг. С какой силой будет действовать этот перегрузок на тело, на котором он лежит, и с каким ускорением он будет двигаться, если вся система придет в движение?

2.36. Два тела, массы которых соответственно равны $m_1 = 0{,}05$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг, связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 2.7).

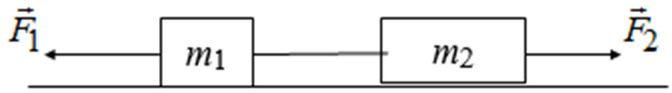

Рис. 2.7. К задаче 2.36

С какой силой можно тянуть первое тело, чтобы нить, способная выдержать нагрузку $T_{max} = 5$ Н, не оборвалась? Изменится ли результат, если силу приложить ко второму телу?

2.37. На неподвижном невесомом блоке уравновешены два груза массой $m_1 = m_2 = 1{,}5$ кг каждый. После того, как на один из грузов был положен перегрузок массой $m_3 = 0{,}5$ кг, грузы пришли в движение. Определите силу натяжения нити, силу давления перегрузка на груз и ускорение грузов.

2.38. Через неподвижный блок перекинули нить, к концам которой подвесили два груза массой $m = 200$ г. Какой добавочный груз нужно поместить на один из висящих грузов, чтобы каждый из них переместился на $l = 150$ см за $t = 5$ с.

2.39. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концу которого привязали грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 3$ кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

2.40. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости (рис. 2.8), составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Гири *1* и *2* одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок.

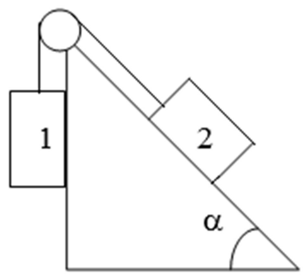

Рис. 2.8. К задаче 2.40

Найдите ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гири *1* о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь. Как изменится результат, если коэффициент трения гири о плоскость $\mu = 0{,}1$?

2.41. На горизонтальном столе лежит брусок *2* (рис. 2.9), к которому привязана нить, перекинутая через невесомый и укрепленный на краю стола блок. Если за нить тянуть с силой $F = 3$ Н, то брусок будет двигаться с ускорением $a_1 = 8\ \text{м}/\text{с}^2$.

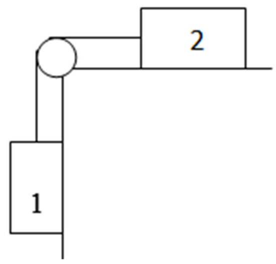

Рис. 2.9. К азадаче 2.41

Каковы будут ускорение a_2 бруска и сила натяжения T нити, если к ее концу привязать груз *1* массой $m = 4$ кг? Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}5$.

2.42. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$ (рис. 2.10). Гири A и B массой 2 кг каждая соединены нитью, перекинутой через блок. Найдите ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T.

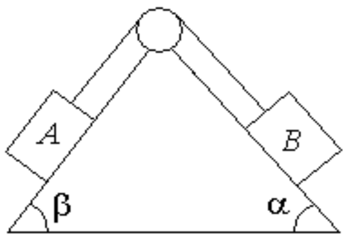

Рис. 2.10. К задаче 2.42

Считайте нить невесомой и нерастяжимой. Как изменится результат, если коэффициент трения гирь о плоскость $\mu = 0{,}1$? Трением пренебречь.

2.43. На гладкой горизонтальной плоскости стола лежат четыре связанных нитью равных груза массой $m = 0{,}1$ кг каждый. На нити, соединенной с этими грузами и перекинутой через неподвижный невесомый блок, прикрепленный к углу стола, подвешен такой же груз. С каким ускорением движется эта система и какова сила натяжения между первым и вторым (к блоку) грузами? Как изменится результат, если коэффициент трения о плоскость $\mu = 0{,}1$?

2.44. При движении в воздухе пули массой $m = 20$ г ее скорость уменьшилась с $\upsilon_0 = 700$ м/с до $\upsilon = 100$ м/с за время $\Delta t = 1$ с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определите коэффициент сопротивления движению k. Действием силы тяжести пренебречь.

2.45. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной $l = 60$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найдите наименьшую частоту вращения ν ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается. Какова сила натяжения веревки T при этой скорости в высшей и низшей точках окружности? Масса ведерка с водой $m = 2$ кг.

2.46. Камень, привязанный к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой частоте вращения ν веревка разорвется, если известно, что она разрывается при силе натяжения, равной десятикратной силе тяжести, действующей на камень?

2.47. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найдите массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки $\Delta T = 10$ Н.

2.48. Самолет, летящий со скоростью $\upsilon = 900$ км/ч, делает «мертвую петлю». Каким должен быть радиус R «мертвой петли», чтобы наибольшая сила F, прижимающая летчика к сидению, была равна: а) пятикратной силе тяжести, действующей на летчика; б) десятикратной силе тяжести, действующей на летчика?

2.49. Парашютист, масса которого $m = 80$ кг, совершает затяжной прыжок. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости парашютиста $F_r = k\upsilon^2$, где коэффициент сопротивления равен $k = 0{,}6$ кг/м. Начальная скорость парашютиста равна нулю. Определитt, через какой промежуток времени t скорость падения парашютиста будет равна 0,9 от скорости υ_c установившегося движения.

2.50. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч, делая поворот радиусом $R = 100$ м. На какой угол α при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

2.51. Определите силу давления на мост автомобиля массой $m = 10^4$ кг, движущегося со скоростью $\upsilon = 20$ м/с, если поверхность моста: а) горизонтальна; б) образует выпуклую дугу радиусом $R = 600$ м; в) вогнутую дугу тем же радиусом.

2.52. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\nu = 0{,}5$ об/с. На каком расстоянии от оси вращения диска при коэффициенте трения $\mu = 0{,}2$ может удержаться находящееся на нем тело?

2.53. Грузик массой $m = 0{,}1$ кг прикреплен к концу невесомого стержня длиной $l = 40$ см, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца с угловой скоростью $\nu = 5$ об/с. Каково натяжение стержня в верхней и нижней точках траектории?

2.54. Груз массой $m = 0{,}5$ кг описывает окружность в горизонтальной плоскости. При этом шнур длиной $l = 0{,}5$ м, на котором подвешен груз, образует с вертикалью угол $\alpha = 60°$. Определите скорость вращения груза и силу натяжения шнура.

2.55. Гирька массой $m = 0{,}1$ кг, привязанная к нити длиной $l = 0{,}3$ м, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $R = 0{,}15$ м. Определите натяжение нити и угловую скорость вращения гирьки.

2.56. Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает нагрузку до $T_{max} = 3000$ Н. На такой проволоке подвешен груз массой $m = 150$ кг. На какой наибольший угол можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении грузом положения равновесия?

2.57. На невесомом стержне висит груз весом $P = 10$ Н. Груз отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найдите натяжение стержня при прохождении им положения равновесия.

2.58. Определите период обращения T искусственного спутника, вращающегося по круговой орбите радиусом $R = 42 \cdot 10^6$ м. Радиус Земли равен $R_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g_0 = 9{,}8$ м/с^2.

2.59. Определите период обращения T Луны вокруг Земли, зная ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2, радиус Земли $R_З = 6400$ км и расстояние между Луной и Землей $r = 3{,}84 \cdot 10^8$ м.

2.60. Две звезды, суммарная масса которых M, находятся на расстоянии R друг от друга. Найдите период обращения этих звезд относительно общего центра вращения.

Практическое занятие № 3

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Цель занятия

Знакомство с понятиями импульса материальной точки и тела, работы, совершаемой при перемещении тела, с видами механической энергии тела, законами сохранения, а также формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Механическая энергия, характеризующая движение и взаимодействие тел, равна сумме кинетической T и потенциальной U энергий. Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

зависит только от его массы и скорости. Значение кинетической энергии обусловлено выбором системы отсчета и не можит быть отрицательным. Кинетическая энергия изолированной частицы сохраняется.

Конкретный вид формулы для расчета потенциальной энергии U определяется характером силового поля. В частности, потенциальная энергия тела в поле силы тяжести и упруго-деформированной пружины рассчитывается как:

$$U = mgh, \quad U = \frac{kx^2}{2}.$$

В консервативных системах выполняется закон сохранения механической энергии:

$$E = T + U = \text{const}.$$

В замкнутых системах, в которых все силы, действующие со стороны внешних тел на каждое тело системы, взаимно уравновешиваются, имеют место три закона сохранения – закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса. Законы сохранения отражают свойства нашего пространства. В основе сохранения энергии лежит однородность времени, т. е. равнозначность всех моментов времени, а в основе законов сохранения импульса и его момента – однородность пространства и изотропия пространства, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках и по всем направлениям.

Для тела, находящегося в поле силы тяжести, закон сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2}+mgh=\text{const}$$

удобнее рассматривать в форме, связывающей два разных момента времени:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2}+mgh_1=\frac{m\upsilon_2^2}{2}+mgh_2\ .$$

Закон сохранения импульса до и после соударения для системы из нескольких тел чаще используется не в полной векторной форме:

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2+...=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2+...,$$

а в виде закона сохранения проекции импульса на ось, вдоль которой силы не действуют или они уравновешены:

$$m_1\upsilon_{1x}+m_2\upsilon_{2x}+...=m_1u_{1x}+m_2u_{2x}+....$$

В более общих случаях (при наличии в системе неконсервативных сил трения и неупругих соударений), когда в процессе совершения работы A неконсервативными силами происходит уменьшение полной механической энергии системы, пользуются законом сохранения и превращения энергии:

$$E_2-E_1=A.$$

Работа, совершаемая силой F на участке траектории от точки *1* до точки *2*, определяется интегралом

$$A=\int_1^2\vec{F}d\vec{s}=\int_1^2F\cos\alpha ds\ .$$

Сила, действующая на тело, не совершает работу, если:

а) тело покоится;

б) сила перпендикулярна перемещению тела ($\alpha = 90°$). Действие такой силы приводит к искривлению траектории движущегося тела.

Работа, совершаемая за единицу времени, – мощность N (часто используют обозначение P):

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad N = \overline{F}\,\overline{\upsilon}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 3-1. Снаряд, летевший с горизонтальной скоростью $\upsilon = 500$ м/с, разрывается на два осколка. Масса одного осколка в два раза больше массы другого. Больший осколок падает по вертикали, а меньший летит под углом 30° к горизонту. Какова скорость меньшего осколка?

Р е ш е н и е. В данном случае силой тяжести по сравнению с силами, появляющимися при взрыве, сможем пренебречь, и поэтому будет выполняться закон сохранения импульса в векторной форме, который запишем в виде:

$$3m\vec{\upsilon} = 2m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2.$$

Левая часть уравнения соответствует импульсу системы до разрыва снаряда (сверху на рис. 3.1), правая часть – после (снизу на рис. 3.1).

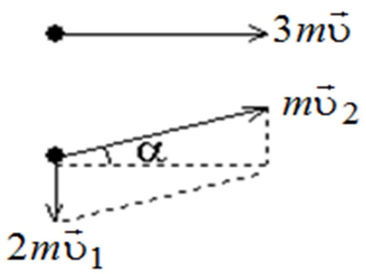

Рис. 3.1. К задаче 3-1

С учетом того, что масса снаряда равна $3m$ – сумма масс осколков m и $2m$ (рис. 3.1), получим:

$$\frac{3m\upsilon}{m\upsilon_2} = \cos\alpha, \quad \upsilon_2 = \frac{3\upsilon}{\cos\alpha}.$$

Те же соотношения будем иметь и при рассмотрении проекции векторного уравнения на горизонтальную ось:

$$3m\upsilon = m\upsilon_2 \cos\alpha, \quad \upsilon_2 = \frac{3\upsilon}{\cos\alpha} = 1750 \text{ м/с}.$$

Задача 3-2. Платформа с песком общей массой $M = 2$ т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой $m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определите, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда равна $\upsilon = 450$ м/с и направлена сверху вниз под углом к горизонту $\alpha = 30°$.

Решение. После соударения платформа начнет двигаться, причем ее скорость $\vec{u}$ будет направлена горизонтально (рис. 3.2).

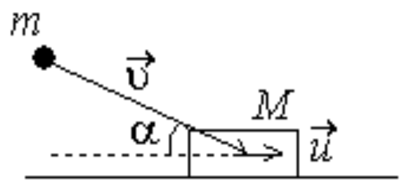

Рис. 3.2. К задаче 3-2

В данном случае закон сохранения импульса в полной векторной форме неприменим, так как вдоль вертикальной оси действуют сила тяжести и сила реакции опоры. В момент соударения сила реакции опоры возрастает, т. е. силы перестают уравновешивать друг друга. Здесь справедлив закон сохранения проекций импульса на горизонтальную ось:

$$m\upsilon\cos\alpha = (M + m)u.$$

Откуда скорость совместного движения платформы с камнем

$$u = \frac{m\upsilon\cos\alpha}{M + m} = 1{,}54 \text{ м/с}.$$

Задача 3-3. Пуля массой $m = 12$ г, летящая с горизонтальной скоростью $\upsilon = 0{,}6$ км/с, попадает в мешок с песком массой $M = 10$ кг, висящий на длинной нити, и застревает в нем. Определите высоту h, на которую поднимается мешок, отклонившись после удара, и долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка.

Решение. Решим задачу, используя законы сохранения энергии и импульса (рис. 3.3).

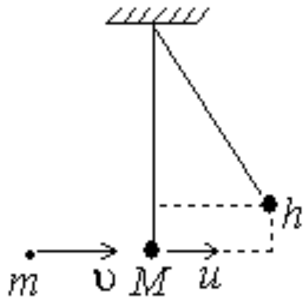

Рис. 3.3. К задаче 3-3

В момент столкновения пули с мешком выполняется закон сохранения импульса:

$$m\vec{\upsilon} = (M+m)\vec{u},$$

из которого следует, что

$$u = \frac{m\upsilon}{M+m}.$$

На следующем этапе совместного подъема мешка с пулей выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh.$$

Откуда высота, на которую поднимается мешок после удара, равна

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{m^2\upsilon^2}{2g(M+m)^2} = 2{,}6 \text{ м}.$$

В процесс соударения энергия уменьшается, так как часть ее идет на пробивание песка. Разность исходной и конечной энергий

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} - (M+m)gh = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \frac{m\upsilon^2}{2}\frac{M}{M+m}.$$

Таким образом, доля кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{M}{M+m} = 0{,}999\,.$$

Задача 3-4. Пуля, имеющая массу $m = 0{,}01$ кг, подлетает со скоростью $\upsilon_1 = 1200$ м/с к доске толщиной $d = 0{,}04$ м и, пробив ее, вылетает со скоростью $\upsilon_2 = 600$ м/с. Найдите среднюю силу сопротивления доски и работу этой силы.

Р е ш е н и е. В процессе столкновения пули с доской (рис. 3.4) кинетическая энергия системы уменьшается.

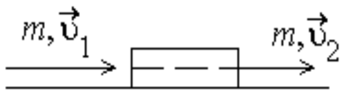

Рис. 3.4. К задаче 3-4

Таким образом, работа, совершаемая при пробивании доски, будет равна убыли кинетической энергии:

$$A = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2}\,.$$

Так как эта работа связана с силой сопротивления соотношением

$$A = F_c d = 5{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

то силу сопротивления найдем следующим образом:

$$F_c = \frac{m}{2d}\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) = 1{,}35 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Задача 3-5. С наклонной плоскости высотой $h = 1$ м и длиной $l = 10$ м скользит тело массой $m = 1$ кг. Найдите: кинетическую энергию T и скорость тела υ у основания плоскости; расстояние s, пройденное телом по горизонтальной части пути до остановки. Коэффициент трения на всем пути примите постоянным и равным $\mu = 0{,}05$.

Р е ш е н и е. На вершине наклонной плоскости тело обладает максимальной энергией, равной $U = mgh$. Эта энергия тратится на работу, совершаемую против сил трения на участках l и s (рис. 3.5).

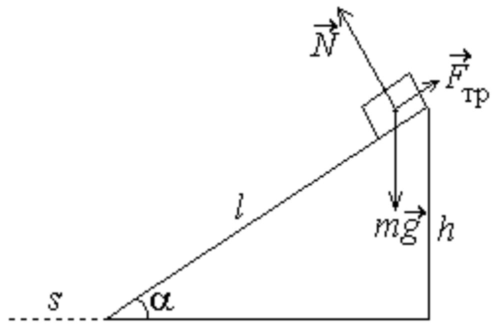

Рис. 3.5. К задаче 3-5

Работа сил трения определяется величиной силы трения, а последняя зависит от величины силы реакции опоры N на данном участке. Как было показано в задаче 2-2, сила реакции опоры равна:

– на наклонной плоскости:

$$N_l = mg\cos\alpha,$$

– на плоской поверхности:

$$N_s = mg.$$

Соответственно, силы трения на этих участках также будут различны. В силу закона сохранения и превращения энергии справедливо соотношение

$$A_{тр} = A_{тр}^{l} + A_{тр}^{s} = F_{тр}^{l} l + F_{тр}^{s} s = \mu N_l l + \mu N_s s = \mu mgl\cos\alpha + \mu mgs = E_n = mgh.$$

Кинетическая энергия T тела у основания плоскости перейдет в работу сил трения на плоском участке, поэтому

$$T = \mu mgs = mgh - \mu mg\cos\alpha l = mg\left(h - \sqrt{l^2 - h^2}\right) = 5 \text{ Дж}.$$

Тогда расстояние

$$s = \frac{h}{\mu} - l\cos\alpha = \frac{h}{\mu} - l\sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} = \frac{h}{\mu} - \sqrt{l^2 - h^2} = 10 \text{ м}.$$

Для нахождения скорости тела у основания плоскости вновь воспользуемся законом сохранения энергии:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + F_{\text{тр}}^l l = \frac{m\upsilon^2}{2} + \mu mgl\cos\alpha,$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh - \mu gl\cos\alpha} = \sqrt{2gh - \mu gl\sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}}} = \sqrt{2gh - \mu g\sqrt{l^2 - h^2}} = 15 \text{ м/с}.$$

Задача 3-6. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 3$ м/с и нагоняет второе тело массой $m_2 = 3$ кг, движущееся со скоростью $\upsilon_2 = 1$ м/с. Найдите скорости тел после столкновения, если удар: а) упругий и центральный; 2) неупругий и центральный.

Решение. В случае упругого центрального соударения (рис. 3.6, *а*) выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения энергии:

Рис. 3.6. К задаче 3-6: *а* – упругий удар; *б* – неупругий удар

$$\begin{cases} \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}, \\ m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \end{cases}$$

Скорости $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ найдем путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2, \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \end{cases}$$

В результате получим:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = 0{,}6 \text{ м/с};$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = 2{,}6 \text{ м/с}.$$

В случае неупругого центрального удара (см. рис. 3.6, *б*) шары слипаются и двигаются в дальнейшем совместно. Таким образом, имеет место только закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Так как все векторы направлены в одну сторону:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = 1{,}8 \text{ м/с}.$$

Задача 3-7. Брусок массой $m = 1$ кг лежит на шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 3.7). К нему прикреплена невесомая пружина, жесткость которой $k = 40$ Н/м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}8$.

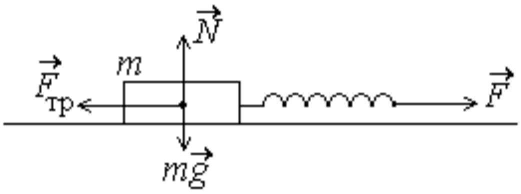

Рис. 3.7. К задаче 3-7

Какую работу необходимо совершить, чтобы равномерно переместить брусок из состояния покоя (пружина не деформирована) на расстояние $l = 2$ м?

Решение. Заметим, что процесс совершения работы происходит в два этапа. На первом этапе пружина растягивается под действием силы $\vec{F}$, при этом совершаемая силой работа A идет на увеличение потенциальной энергии. Только после этого брусок начинает перемещаться, на что затрачивается работа A_2. Условие равномерности перемещения говорит о том, что результирующее ускорение равно нулю, а значит, сумма всех приложенных к телу сил (рис. 3.7) также равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F} = 0.$$

Следствием этого уравнения являются два соотношения:

$$N = mg$$

и

$$F = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\,.$$

Поскольку известна величина приложенной силы, по закону Гука рассчитаем максимальное удлинение пружины

$$x = \frac{F}{k} = \frac{\mu mg}{k}\,,$$

а затем и работу A_1, идущую на растяжение пружины:

$$A_1 = k\frac{x^2}{2} = \frac{\mu^2 m^2 g^2}{2k}\,.$$

Работу A_2 по перемещению бруса, совершаемую силой F на пути l, вычислим по формуле

$$A_2 = Fl = \mu mgl\,.$$

Искомая работа равна сумме работ A_1 и A_2:

$$A = A_1 + A_2 = \mu mg\left(\frac{\mu mg}{2k} + l\right) = 16{,}45 \text{ Дж.}$$

Задача 3-8. Невесомая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой груз массой m (рис. 3.8). Какую максимальную скорость будет иметь груз при своем движении вниз? Трением пренебречь.

Решение. После падения груза на пружину последняя начнет колебаться около положения нового равновесия, смещенного на некоторое расстояние x_0 вниз, т. е. его высота от поверхности стола будет равна $(l - x_0)$. Величину x_0 находим исходя из условия

$$mg = kx_0\,,$$

которое справедливо после затухания колебаний.

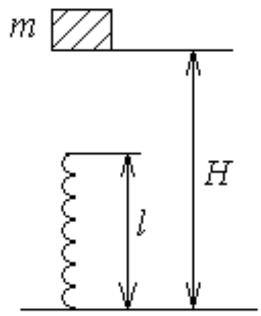

Рис. 3.8. К задаче 3-8

Максимальной скоростью обладает груз в момент прохождения положения равновесия, поэтому первоначальную энергию груза и пружины E_1 сравним с их энергией E_2 именно в этот момент. Энергия E_1 – это потенциальная энергия груза, равная $E_1 = mgH$. Пружина в этот момент не деформирована, ее энергия равна нулю.

В момент прохождения грузом положения нового равновесия энергия E_2 складывается из потенциальной энергии груза $mg(l - x_0)$, кинетической энергии груза $\frac{m\upsilon^2}{2}$ и потенциальной энергии сжатой пружины $\frac{kx_0^2}{2}$. По закону сохранения энергии в силу того, что трением можно пренебречь, эти энергии должны быть равны ($E_1 = E_2$) или

$$mgH = mg(l - x_0) + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

Используя полученное ранее соотношение $x_0 = \frac{mg}{k}$, найдем искомую скорость:

$$\upsilon = \sqrt{2g(H - l) + \frac{mg^2}{k}}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

3.1. Какие системы называются замкнутыми? Приведите примеры таких систем.

3.2. Какие свойства пространства и времени лежат в основе законов сохранения?

3.3. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется?

3.4. Тело брошено под углом к горизонту. Сохраняется ли при этом импульс тела и проекция импульса тела на какие-либо направления?

3.5. Как космонавту, находящемуся автономно в открытом космосе, вернуться на космический корабль без посторонней помощи?

3.6. Что характеризует механическая энергия, и из чего она складывается?

3.7. Чем определяются кинетическая и потенциальная энергии тела?

3.8. Как определяется работа силы?

3.9. Всегда ли сила, действующая на тело, совершает работу?

3.10. Какие силы называются консервативными? Приведите примеры консервативных и неконсервативных сил.

3.11. Какова связь между силой и потенциальной энергией?

3.12. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?

3.13. В чем заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?

3.14. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?

3.15. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом и абсолютно неупругом соударениях?

3.16. Две частицы с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направлениях по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями υ_1 и υ_2. Определите величину кинетической энергии частиц после их абсолютно неупругого удара.

3.17. Две частицы с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направлениях по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями $\upsilon_1 = 3$ м/с и $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определите количество тепла, выделившееся после их абсолютно неупругого удара.

3.18. Три одинаковых тела массой $m = 50$ г расположены на горизонтальной плоскости вдоль одной линии. С крайним телом соударяется такое же тело, движущееся со скоростью $\upsilon = 20$ м/с вдоль линии, на которой расположены тела. Определите кинетическую энергию системы тел после всех соударений, считая соударения тел абсолютно неупругими.

3.19. Два тела массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 6$ кг движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Определите количество тепла, выделившегося при абсолютно неупругом соударении этих тел.

3.20. По горизонтальным рельсам движется платформа массой $M = 200$ кг со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. На нее вертикально падает камень массой $m = 50$ кг и движется в дальнейшем вместе с платформой. Определите скорость совместного движения платформы с камнем и количество теплоты, выделившееся при соударении.

3.21. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью $\upsilon = 400$ м/с, разорвался на две равные половины. Начальная скорость одной половины снаряда после разрыва равна $\upsilon_1 = 200$ м/с и направлена вертикально вниз. Определите величину и направление скорости второй половины снаряда.

3.22. Снаряд, падавший под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\upsilon = 1000$ м/с, разорвался на две равные половины. Начальная скорость одной половины снаряда направлена вертикально вниз и также равна $\upsilon_1 = 1000$ м/с. Определите величину и направление скорости второй половины снаряда.

3.23. Ядро, падавшее вертикально вниз со скоростью $\upsilon = 200$ м/с, разорвалось на два осколка. Первый осколок, масса которого составляет 40 % массы ядра, полетел в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_1 = 500$ м/с. Определите величину и направление скорости второго осколка.

3.24. Снаряд разорвался в верхней точке траектории на высоте h на две равные части. Скорость снаряда в момент взрыва равна υ. Один осколок упал на землю под местом взрыва через время t. Найдите направление и величину скорости второго осколка.

3.25. Две частицы с массами m и $2m$, имеющие импульсы p и $p/2$, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях. После соударения частицы обмениваются импульсами. Определите потерю механической энергии при соударении.

3.26. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найдите, какая часть первоначальной кинетической энергии переходит при ударе в тепло.

3.27. Идеально гладкий шар A, движущийся со скоростью υ_0, одновременно сталкивается с двумя такими же, соприкасающимися между собой шарами B и C (рис. 3.9). Удар является абсолютно упругим. Определите скорости шаров после столкновения.

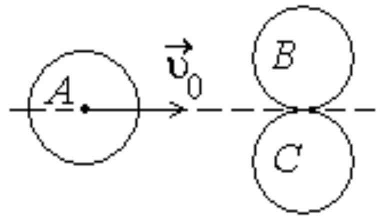

Рис. 3.9. К задаче 3.27

3.28. На гладкий клин массой M, который может скользить лишь горизонтально, падает шарик массой m. Шарик упруго ударяется о грань, образующую угол $\alpha = 45°$ к горизонту. Скорость шарика непосредственно перед ударом равна υ_0 и направлена вертикально вниз (рис. 3.10). Найдите скорость клина после удара. Трением пренебречь.

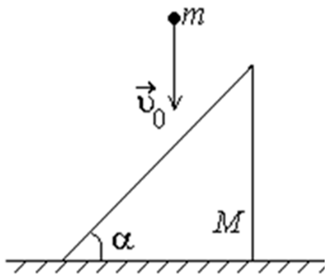

Рис. 3.10. К задаче 3.28

3.29. Клин массой m_1 находится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. Брусок массой m_2 первоначально расположен на клине на высоте h (рис. 3.11). Брусок отпускают, и он начинает скользить по поверхности клина. Трение между бруском и клином отсутствует. Определите скорость бруска после соскальзывания с клина.

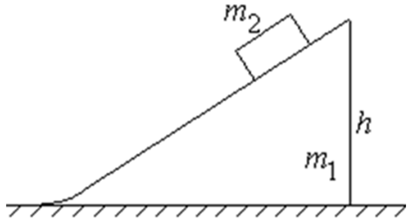

Рис. 3.11. К задаче 3.29

3.30. Частица массой m_1 налетела со скоростью υ на неподвижную частицу массой m_2. Считая удар упругим и центральным, определите скорость частицы m_2 после удара и долю первоначальной кинетической энергии, переданной второму телу при ударе.

3.31. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом, жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня $l = 1$ м. Найдите скорость υ пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.

3.32. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найдите КПД удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при ее углублении пренебречь.

3.33. Молот массой $m = 10$ кг, двигаясь со скоростью $\upsilon = 3$ м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием $M = 110$ кг. Считая удар абсолютно неупругим, определите энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Чему равен КПД процесса ковки при данных условиях?

3.34. Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 80°$ с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найдите коэффициент трения на всем пути, если известно, что тело проходит по горизонтальной поверхности то же расстояние, что и по наклонной плоскости.

3.35. Тело массой $m = 3$ кг начинает скользить по наклонной плоскости высотой $h = 0{,}5$ м и длиной склона $l = 1$ м и приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью $\upsilon = 2{,}45$ м/с. Найдите коэффициент трения μ тела о плоскость и количество теплоты q, выделенное при трении.

3.36. В тело массой $m_1 = 1$ кг, лежащее на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой $m_2 = 0{,}01$ кг и застревает в нем. Скорость пули направлена горизонтально и равна $\upsilon = 700$ м/с. Определите путь, пройденный телом до остановки, и работу по торможению тела, совершенную при этом силами трения. Коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}05$.

3.37. Шар массой $m = 1{,}8$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял $\eta = 0{,}36$ своей кинетической энергии T_1. Определите массу большего шара.

3.38. Для забивки сваи массой $m = 100$ кг используется копер, подъемная часть которого массой $M = 400$ кг падает с высоты $h = 1{,}5$ м. Найдите среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая уходит в землю на глубину $s = 0{,}05$ м. Считайте удар между сваей и падающим грузом абсолютно неупругим.

3.39. Пуля массой $m = 10^{-2}$ кг, летевшая горизонтально со скоростью $\upsilon = 600$ м/с, ударилась в свободно подвешенный деревянный брусок массой $M = 5$ кг и застряла в нем, углубившись на $s = 0{,}1$ м. Найдите силу сопротивления дерева движению пули.

3.40. Небольшое тело начинает скользить без трения с вершины сферы вниз (рис. 3.12). На какой высоте h над центром сферы тело отделится от ее поверхности и полетит свободно? Радиус сферы равен R.

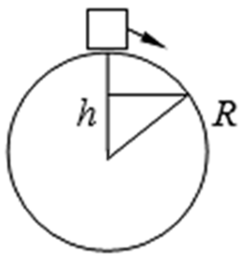

Рис. 3.12. К задаче 3.40

3.41. Математический маятник представляет собой деревянный шар массой m_1, подвешенный на нити длиной l. Пуля массой m_2, летящая горизонтально, попадает в шар и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули шар сможет сделать полный оборот в вертикальной плоскости?

3.42. Два небольших тела, отношение масс которых равно $m_1/m_2 = 2$, одновременно начинают соскальзывать без трения с противоположных концов внутрь полусферы радиусом R. Найдите высоту, на которую поднимутся тела после абсолютно неупругого соударения.

3.43. Брусок массой $M = 1{,}5$ кг лежит на горизонтальной поверхности. В него попадает пуля, летящая горизонтально, и пробивает его. Масса пули $m = 9$ г, скорость перед ударом $\upsilon_1 = 800$ м/с, а после вылета из бруска $\upsilon_2 = 150$ м/с. Какой путь пройдет брусок до остановки, если коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}2$. Смещением бруска во время удара пренебречь.

3.44. Пуля летит с некоторой начальной скоростью. Она пробивает доску толщиной $d = 3{,}6$ см и продолжает полет со скоростью, составляющей 0,8 начальной. Какой максимальной толщины доску она может пробить?

3.45. Резерфорд наблюдал, что при любом столкновении с ядрами меди α-частица с энергией $E_1 = 5$ МэВ отлетает назад с энергией $E_2 = 3{,}9$ МэВ. Вычислить по этим данным отношение масс ядра меди и α-частицы.

3.46. На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 и m_2, соединенные пружиной жесткости k. Определите минимальную горизонтальную постоянную силу, которую надо приложить ко второму телу, чтобы сдвинуть первое тело. Коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью равен μ.

3.47. Два груза массами m и M связаны невесомой пружиной друг с другом (рис. 3.13). С какой силой F надо надавить на груз m, чтобы в процессе колебаний груз M оторвался от стола?

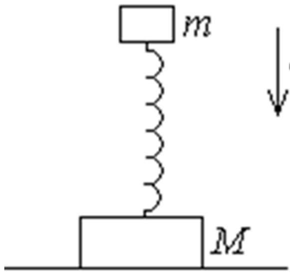

Рис. 3.13. К задаче 3.47

3.48. Тело массой m упало с высоты h на чашу пружинных весов. Массы чаши и пружины пренебрежимо малы, жесткость пружины k. Определите максимальное сжатие пружины.

3.49. Груз массой $m = 1$ кг падает на чашу весов с высоты $h = 10$ см. Каковы показания весов F в момент удара, если после успокоения качаний чаша опускается на $x_0 = 0{,}5$ см?

3.50. С какой скоростью двигался вагон массой $m = 20$ т, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на $x_0 = 10$ см? Жесткость пружины каждого буфера $k = 1$ МН/м.

3.51. Акробат прыгает на сетку с высоты $h = 8$ м. На какой предельной высоте над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $x_0 = 0{,}5$ м, если акробат прыгает на нее с высоты $h_1 = 0{,}5$ м.

3.52. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой $m = 20$ г поднялась на высоту $h = 5$ м. Определите жесткость пружины пистолета k, если она была сжата на $s = 10$ см. Массой пружины пренебречь.

3.53. Пружина жесткостью $k = 10^4$ Н/м сжата силой $F = 2 \cdot 10^2$ Н. Определите работу внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta l = 1$ см.

3.54. Гиря, положенная на верхний конец пружины, сжимает ее на $\Delta l = 2$ мм. На сколько сожмет пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты $h = 5$ см?

3.55. Резиновый мяч массой $m = 0{,}1$ кг двигается горизонтально и ударяется о неподвижную вертикальную стенку. За время $\Delta t = 0{,}01$ с мяч сжимается на $\Delta l = 1{,}37$ см, такое же время Δt затрачивается на восстановление первоначальной формы мяча. Найдите среднюю силу, действующую на стенку во время удара.

3.56. Тело m падает с высоты H на стоящую вертикально на полу пружину жесткостью k и длиной l. Определите максимальную скорость тела, наибольшую силу давления на пол.

3.57. В детском пистолете шарик кладут на пружину, укрепленную внутри ствола. Пружину сжимают на длину $\Delta l = 5$ см, а потом отпускают, направив ствол вертикально вверх. Шарик отрывается от пружины в тот момент, когда она полностью распрямится. Шарик взлетает на высоту $H = 0{,}5$ м. Какое максимальное ускорение приобрел шарик? Трением, сопротивлением воздуха и массой пружины пренебречь.

3.58. Льдина площадью поперечного сечения $S = 1$ м^2 и высотой $H = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

3.59. В озере плавает плоская льдина массой $m = 100$ кг и площадью $S = 0{,}2$ м^2. Какую работу надо свершить, чтобы полностью утопить льдину? Плотность льдины $\rho_л = 900$ кг/м^3.

3.60. Резиновый шарик радиусом $R = 15$ мм и массой $m = 5$ г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $H = 10$ см. Определите величину механической энергии, перешедшей в тепло.

Практическое занятие № 4

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями кинематики вращательного движения материальной точки и тела, а также формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Во вращательном движении мерой инертности служит не масса, как таковая, а ее распределение относительно оси вращения, характеризуемое с помощью момента инерции. Момент инерции $J = mr^2$ материальной точки массой m зависит также от квадрата расстояния r до оси вращения. Момент инерции сплошного тела определяется вкладами от всех его точек, что приводит к интегралу

$$J = \int r^2 dm.$$

В табл. 4.1 приведены моменты инерции некоторых тел.

Таблица 4.1

Моменты инерции некоторых тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Тонкое кольцо, обруч массой m и радиусом R	Проходит через центр перпендикулярно плоскости основания	$J = mR^2$
Однородный диск, цилиндр	Проходит через центр диска перпендикулярно плоскости основания	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр тяжести стержня перпендикулярно ему	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Однородный шар массой m и радиусом R	Проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5} mR^2$

Моменты инерции относительно расположенных параллельно, но находящихся на некотором расстоянии d осей могут быть рассчитаны по теореме Штейнера:

$$J = J_0 + md^2,$$

где J_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела.

Момент силы, характеризующий способность этой силы F вращать тело вокруг данной оси, зависит от плеча силы l – кратчайшего расстояния от оси вращения до линии действия силы F:

$$M = Fl.$$

Основной закон динамики вращательного движения тела записывается в виде

$$M = J\varepsilon,$$

где M – результирующий момент силы, действующей на тело, движущееся с угловым ускорением ε, момент инерции которого относительно рассматриваемой оси равен J. Если ось вращения закреплена, силы могут вращать тело только по часовой стрелке и против нее, поэтому при нахождении результирующего момента сил моменты сил, вращающих тело, берутся со знаком «+», а моменты сил, противодействующих вращению, – со знаком «–».

Момент импульса L и кинетическая энергия T тела, участвующего во вращении с угловой скоростью ω, вычисляются по следующим формулам:

$$L = J\omega, \quad T = J\omega^2/2.$$

Если тело не только вращается, но и движется поступательно, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

где υ_c – скорость центра масс, J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Примеры решения типовых задач

Задача 4-1. К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н (рис. 4.1). При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{\text{тр}} = 2$ Н·м. Определите массу m диска, если известно, что его угловое ускорение постоянно и равно $\varepsilon = 16$ рад/с^2.

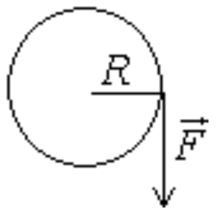

Рис. 4.1. К задаче 4-1

Р е ш е н и е. Момент силы F, приложенной к ободу диска, равен

$$M = FR,$$

поэтому основной закон динамики вращательного движения запишется в виде

$$FR - M_{\text{тр}} = J\varepsilon.$$

Момент инерции J однородного сплошного диска находится по формуле

$$J = \frac{1}{2} mR^2,$$

используя которую, получаем соотношение

$$\frac{1}{2} mR^2 \varepsilon = FR - M_{\text{тр}},$$

позволяющее определить массу диска:

$$m = \frac{2(FR - M_{\text{тр}})}{\varepsilon R^2} = 24 \text{ кг}.$$

Задача 4-2. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 1{,}5$ кг·м^2, вращаясь при торможении равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшил частоту своего вращения с $\nu_0 = 240$ об/мин до $\nu_1 = 120$ об/мин. Определите: а) угловое ускорение ε маховика; б) момент M силы торможения; в) работу торможения A.

Решение. Угловое ускорение ε маховика найдем из соотношения

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(\nu_1 - \nu_0)}{t} = -\,0{,}21 \text{ рад/с}^2.$$

Здесь $\nu_0 = 240$ об/мин $= 4$ об/с, а $\nu_1 = 120$ об/мин $= 2$ об/с. Знак «–» указывает на торможение маховика.

Момент силы торможения найдем из основного закона динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon = 0{,}315 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Работу силы торможения определим как разность энергий в начальный и конечный моменты времени:

$$A = E_2 - E_1 = \frac{J\omega_0^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 J(\nu_0^2 - \nu_1^2) = 360 \text{ Дж}.$$

Задача 4-3. Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 60$ г и $m_2 = 100$ г перекинута через блок диаметром $D = 5$ см (рис. 4.2). Определите момент инерции J блока, если под действием сил тяжести грузов он получил угловое ускорение $\varepsilon = 2$ рад/с^2.

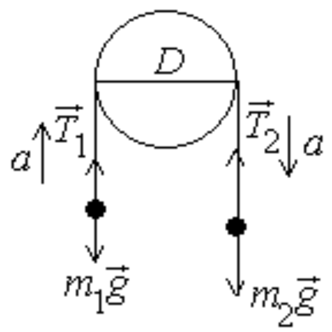

Рис. 4.2. К задаче 4-3

Решение. В данном случае (рис. 4.2) силы натяжения T_1 и T_2 не равны друг другу, так как только в случае их неравенства блок начинает проворачиваться и приобретать угловое ускорение. Поэтому для решения задачи необходимо совместное решение трех уравнений: для грузов, движущихся поступательно, запишем второй закон Ньютона.

Для вращающегося блока используем основной закон динамики вращательного движения. В целом, имеем:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T_2, \\ M = R(T_2 - T_1) = J\varepsilon. \end{cases}$$

Учитывая, что $R = \dfrac{D}{2}$, $a = \varepsilon R$, для определения трех неизвестных T_1, T_2 и J получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \varepsilon D = 2(T_1 - m_1 g), \\ m_2 \varepsilon D = 2(m_2 g - T_2), \\ 2J\varepsilon = D(T_2 - T_1). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем:

$$J = \frac{Dg}{2\varepsilon}(m_2 - m_1) - \frac{D^2}{4}(m_1 + m_2) = 4{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ кг·м}^2.$$

Задача 4-4. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $\nu = 2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?

Решение. Искомая работа будет равна разности кинетических энергий шара в конечный и начальный моменты времени:

$$A = E_2 - E_1 = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 J(\nu_2^2 - \nu_1^2) = 6\pi^2 J\nu^2,$$

причем момент инерции медного ($\rho = 8600$ кг/м^3) шара относительно оси, проходящей через его центр, найдем как

$$J=\frac{2}{5}mR^2=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot R^2=\frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Окончательно будем иметь:

$$A=\frac{16}{5}\pi^3\rho R^5\nu^2=3{,}2\pi^3\rho R^5\nu^2=34{,}1\text{ Дж.}$$

Задача 4-5. Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша, 2) верхний его конец?

Решение. Задачу решим с применением закона сохранения механической энергии. В процессе падения карандаша его потенциальная энергия $mgh=\frac{mgl}{2}$ переходит в кинетическую энергию вращения $\frac{J\omega^2}{2}$, поэтому угловую скорость ω и линейную $\upsilon=\omega R$ найдем из уравнения

$$\frac{mgl}{2}=\frac{J\omega^2}{2}.$$

Здесь необходимо учесть, что момент инерции карандаша рассчитывается относительно оси, проходящей через его конец, а не относительно оси симметрии, когда $J_c=\frac{1}{12}ml^2$. Для нахождения искомого момента инерции применим теорему Штейнера:

$$J=J_c+md^2=\frac{1}{12}ml^2+m\frac{l^2}{4}=\frac{1}{3}ml^2.$$

Теперь для нахождения скоростей ω_2 и υ_2 = $\omega_2 l$ конца стержня получим уравнения:

$$mgl=\frac{1}{3}ml^2\omega_2^2,\quad mgl=\frac{1}{3}m\upsilon_2^2,$$

из которых находим:

$$\omega_2=\sqrt{\frac{3g}{l}}=14\text{ рад/с},\qquad \upsilon_2=\sqrt{3gl}=2{,}1\text{ м/с}.$$

Линейная скорость середины стержня в два раза меньше, так как здесь $R=\frac{l}{2}$, $\upsilon=\omega\frac{l}{2}$, и поэтому υ_1=1,05 м/с; угловая скорость вращения такая же, так как она одинакова у всех точек вращающегося тела.

Задача 4-6. Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $\nu_1=10$ об/мин. Человек массой $m_0=60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

Решение. В силу закона сохранения количества движения имеем

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2,$$

где J_1 и J_2 – моменты инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю и в центре, соответственно, ω_1 и ω_2 – угловые скорости платформы в первом и втором положениях человека.

Моменты инерции платформы с человеком на краю и в центре с учетом аддитивности понятия момента инерции определяются соотношениями:

$$J_1=\frac{mR^2}{2}+m_0R^2,\quad J_2=\frac{mR^2}{2},$$

где R – радиус платформы.

Подставляя эти соотношения в закон сохранения количества движения и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, будем иметь:

$$\left(\frac{mR^2}{2}+m_0R^2\right)2\pi\nu_1=2\pi\nu_2\frac{mR^2}{2},$$

$$\nu_2=\nu_1\frac{mR^2+2m_0R^2}{mR^2}=\nu_1\frac{m+2m_0}{m}=22\text{ об/мин.}$$

Задача 4-7. Горизонтальная платформа, масса которой $m_1=250$ кг, имеет форму диска, радиус которого $R=2{,}5$ м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через ее центр. Какая будет угловая скорость ω платформы, если вдоль ее края будет двигаться человек массой $M = 75$ кг со скоростью $\upsilon = 2{,}5$ м/с относительно платформы?

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи платформа, на которой находится человек, вращается по инерции. Это говорит о том, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «платформа – человек» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_{\text{ч}} + \vec{L}_{\text{п}} = 0,$$

где $L_{\text{ч}} = m_2 \upsilon R$ – момент импульса человека относительно оси вращения платформы; $L_{\text{п}}$ – момент импульса платформы с человеком:

$$L_{\text{п}} = \omega\left(J_{\text{п}} + J_{\text{ч}}\right),$$

где $J_{\text{п}} = \frac{1}{2} m_1 R^2$, $J_{\text{ч}} = m_2 R^2$ – момент инерции платформы и человека соответственно. Подставив, получаем

$$m_2 \upsilon R^2 = \omega\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right).$$

Отсюда может быть найдена угловая скорость:

$$\omega = \frac{m_2 \upsilon}{\frac{1}{2} m_1 R + m_2 R} = \frac{2 m_2 \upsilon}{R\left(m_1 + 2m_2\right)} = 37{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{с}^{-1}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

4.1. Что такое момент инерции тела и какова его роль во вращательном движении?

4.2. От чего зависит момент инерции относительно некоторой оси вращения?

4.3. Как может быть рассчитан момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов?

4.4. В каких случаях для расчета момента инерции может быть применена теорема Штейнера?

4.5. Какой вид имеет формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

4.6. Как рассчитывается кинетическая энергия тела, участвующего одновременно в поступательном и вращательном движениях?

4.7. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? Как определяется направление момента силы?

4.8. В каких случаях действие сил не приводит к вращению тела?

4.9. Что такое результирующий момент внешних сил? Как находится результирующий момент, если ось вращения закреплена?

4.10. Как находится работа, совершаемая силой при вращении тела?

4.11. Как выводится основной закон динамики вращательного движения, и какой вид он имеет?

4.12. Что такое момент импульса материальной точки? Как определяется направление вектора момента импульса?

4.13. Как формулируется закон сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется?

4.14. К каким выводам можно прийти при сопоставлении основных уравнений динамики поступательного и вращательного движений?

4.15. Какими уравнениями описываются произвольное движение и равновесие тела?

4.16. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 150$ кг · м^2, вращается с частотой $\nu = 240$ об/мин. Через время $t = 1$ мин, после того, как на маховик стал действовать момент сил торможения, он остановился. Определите: а) момент M сил торможения; б) число оборотов маховика от начала торможения до полной остановки; в) начальные кинетическую энергию и момент импульса.

4.17. Частота вращения маховика, момент инерции которого равен $J = 120$ кг · м^2, составляет $\nu_0 =$ 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время $t = \pi$ мин. Считая трение в подшипниках постоянным, определите момент M сил трения.

4.18. Маховик массой $m = 5$ кг вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой $\nu = 600$ мин$^{-1}$. Массу маховика можете считать распределенной по его ободу радиусом $R = 30$ см. Через $t = 40$ с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найдите тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

4.19. К ободу колеса, имеющего форму диска, радиусом $R = 0{,}5$ м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 100$ Н. Найдите угловое ускорение колеса, время, прошедшее после начала действия силы до достижения колесом скорости, соответствующей $\nu = 100$ об/с, момент импульса колеса в этот момент времени.

4.20. Маховик, момент инерции которого равен $J = 60$ кг · м^2, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 30$ рад/с. Найдите кинетическую энергию T маховика, его момент импульса L, а также тормозящий момент M, под действием которого он останавливается через время $t = 20$ с.

4.21. Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 245$ кг · м^2, вращается с частотой $\nu = 20$ об/с. Через минуту после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, его частота вращения уменьшилась в два раза. Найдите: момент сил трения; число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил; работу, совершенную силами трения за это время.

4.22. Найдите момент инерции J и момент импульса L земного шара относительно оси вращения.

4.23. На барабан массой $M = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Найдите ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

4.24. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 10$ кг. Найдите момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04$ м/с^2.

4.25. На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}1$ кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана груз находился на высоте $h = 1$ м над полом. Через какое время груз опустится на пол и какова будет при этом его кинетическая энергия? Трением пренебречь.

4.26. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найдите ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

4.27. Определите угловое ускорение блока радиусом R с моментом инерции J, через который перекинута нить с грузами массами m_1 и m_2. Трением пренебречь.

4.28. Блок массой $m = 1$ кг укреплен на конце стола (см. рис. 2.9). Гири *1* и *2* одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Гиря *2* находится на поверхности стола, а гиря – свешивается со стола. Коэффициент трения гири *2* о стол $\mu = 0{,}1$. Найдите ускорение, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь.

4.29. Однородный цилиндр массой M и радиусом R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза массы m, прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр. Найдите угол φ поворота цилиндра в зависимости от времени, если при $t = 0$ угол $\varphi = 0$.

4.30. На краю свободно вращающегося большого горизонтального диска, имеющего радиус R и момент инерции J, стоит человек массой m. Диск совершает ν об/мин. Как изменится скорость вращения диска и энергия системы, если человек перейдет от края диска к центру? Размерами человека по сравнению с радиусом диска пренебречь.

4.31. Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $\upsilon = 4$ м/с. Найдите кинетическую энергию диска.

4.32. Шар диаметром $D = 6$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая $\nu = 4$ об/с. Масса шара $m = 0{,}25$ кг. Найдите кинетическую энергию шара.

4.33. Шар массой $m = 1$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $\upsilon_1 = 10$ см/с, после удара $\upsilon_2 = 8$ см/с. Найдите количество тепла Q, выделившееся при ударе.

4.34. Найдите кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью $\upsilon = 9$ км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 78$ кг, причем на колеса приходится $m_1 = 3$ кг. Колеса велосипедиста считать обручами.

4.35. Мальчик катит обруч по горизонтальной поверхности со скоростью $\upsilon = 7{,}2$ км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

4.36. По наклонной плоскости, образующей угол φ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найдите линейное ускорение центра диска.

4.37. С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться сплошной цилиндр и шар одинаковых радиусов. Определите: а) какое тело будет иметь большую скорость на данном уровне и во сколько раз? б) во сколько раз скорость одного будет больше скорости другого в данный момент времени?

4.38. Шар и сплошной цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое тело поднимется выше? Найдите отношение высот подъема.

4.39. Обод массой $m = 2$ кг и внешним радиусом $R = 5$ см скатывается по наклонной плоскости длиной $l = 2$ м и углом наклона $\alpha = 30°$. Определите его момент инерции относительно оси вращения, если скорость в конце наклонной плоскости $\upsilon = 3{,}3$ м/с.

4.40. Сплошной шар скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту. Каково ускорение центра масс шара?

4.41. Бревно высотой $h = 3$ м и массой $m = 50$ кг начинает падать из вертикального положения на землю. Определите скорость верхнего конца и момент импульса бревна в момент его падения на землю.

4.42. На краю диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси, на скамье сидит человек массой $m_1 = 65$ кг. На какой угол φ повернется скамья, если человек пойдет по краю диска и вернется в исходную точку? Масса диска равна $m_2 = 200$ кг. Момент инерции J человека рассчитывать как для материальной точки.

4.43. Однородный стержень длиной $l = 1$ м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний его конец при прохождении положения равновесия имел скорость $\upsilon = 5$ м/с?

4.44. Шар, подвешенный на тонкой спице длиной l, отклонен от положения равновесия на угол 90° и отпущен. Какую скорость будет иметь центр тяжести шара в момент прохождения им положения равновесия, если его диаметр равен длине спицы?

4.45. Однородный тонкий тяжелый стержень длиной l висит на горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Какую начальную угловую скорость надо сообщить стержню, чтобы он повернулся на угол $\alpha = 180°$?

4.46. Стержень длиной l, который может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, под действием силы тяжести переходит из горизонтального положения в вертикальное. Определите угловую и линейную скорости нижней точки стержня в этот момент.

4.47. Тело массой M подвешено на нити длиной l. В тело попадает пуля массой m и застревает в нем, нить при этом отклоняется на угол α. Найдите скорость υ и кинетическую энергию пули. Считать, что вся масса тела M сосредоточена на расстоянии l от точки подвеса.

4.48. Пуля массой $m = 50$ г, двигаясь со скоростью $\upsilon = 100$ м/с, ударяется о выступ покоящегося зубчатого колеса, момент инерции которого $J = 0{,}2$ кг·м^2. Расстояние от точки попадания пули до оси вращения $R = 30$ см. Определите угловую скорость колеса, считая удар неупругим. Пуля двигалась в плоскости вращения колеса.

4.49. В конец стержня массой M и длиной l, подвешенного за один из его концов, попадает пуля массой m, летящая со скоростью υ, и застревает в нем. Определите угловую скорость вращения стержня.

4.50. Обруч, вся масса которого сосредоточена в ободе, раскрутили до угловой скорости ω и поставили на шероховатую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Найдите время, в течение которого обруч будет подниматься вверх по плоскости. Радиус обруча R.

Практическое занятие № 5

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями механики жидкостей и газов и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Гидростатическое давление p столба жидкости плотностью ρ на глубине h рассчитывается по формуле

$$p = \rho g h.$$

Выталкивающая сила Архимеда, действующая на тело, погруженное в жидкость, равна

$$F_A = \rho g V,$$

где V – объем жидкости, вытесненной телом, g – ускорение свободного падения.

Уравнение неразрывности для стационарного течения жидкости:

$$\rho \upsilon S = \text{const}; \quad \rho_1 \upsilon_1 S_1 = \rho_2 \upsilon_2 S_2,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока, υ – скорость жидкости.

Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$p + \rho g h + \frac{\rho \upsilon^2}{2} = \text{const},$$

где p – статическое давление, $\rho g h$ – гидростатическое давление жидкости на глубине h, $\frac{\rho \upsilon^2}{2}$ – динамическое давление (скоростной напор). Скорость истечения жидкости из отверстия может быть найдена по формуле Торричелли:

$$\upsilon = \sqrt{2gh},$$

где h – расстояние от отверстия до поверхности жидкости.

Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости может быть рассчитана по формуле

$$F = \eta \left| \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} \right| S,$$

где η – динамическая вязкость жидкости, $\Delta\upsilon/\Delta x$ – градиент скорости, S – площадь соприкасающихся слоев.

Формула Стокса для расчета силы сопротивления, действующей на шарик радиуса r, движущийся в вязкой среде:

$$F = 6\,\pi\eta\upsilon r.$$

Характер движения жидкости (газа) определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{D\upsilon\rho}{\eta} = \frac{D\upsilon}{\nu},$$

где D – величина, характеризующая линейные размеры тела, обтекаемого жидкостью (газом), υ – скорость течения. Отношение $\nu = \eta/\rho$ называется кинематической вязкостью.

При ламинарном движении объем жидкости (газа), протекающий за время t через капиллярную трубку, радиусом r и длиной l, под действием разности давлений Δp на концах трубки определяется формулой Пуазейля:

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 5-1. Для определения плотности неизвестной жидкости однородное тело подвесили на динамометре в этой жидкости, а затем в вакууме и в воде (рис. 5.1). Оказалось, что тело, находясь в жидкости, растягивает пружину динамометра с силой $T_ж = 1,66$ Н, в вакууме – с силой $T = 1,8$ Н, а в воде – с силой $T_0 = 1,6$ Н. Найдите плотности жидкости $\rho_ж$ и тела $\rho_т$.

Р е ш е н и е. Силы, действующие на подвешенное тело, указаны на рис. 5.1, причем силы Архимеда, действующие только в жидкости F_A и в воде $F_А^0$, определяются соотношениями:

$$F_А = \rho_ж Vg, \quad F_А^0 = \rho_0 Vg,$$

где $\rho_ж$ и ρ_0 – плотности жидкости и воды, V – объем подвешенного тела. Условия равновесия тела во всех трех средах приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} T_ж + \rho_ж Vg = \rho_т Vg, \\ T = \rho_т Vg, \\ T_0 + \rho_0 Vg = \rho_т Vg. \end{cases}$$

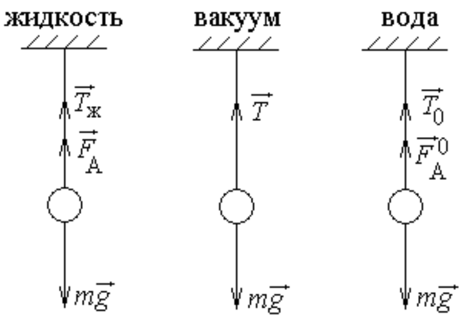

Рис. 5.1. К задаче 5.1

Здесь учтено, что масса тела связана с его плотностью соотношением $m = \rho_т V$.

Решив данную систему уравнений, получим следующие соотношения:

$$\rho_ж = \frac{(T - T_ж)\rho_0}{T - T_0} = 0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/ м}^3,$$

$$\rho_т = \frac{T\rho_0}{T - T_0} = 9 \cdot 10^3 \text{ кг/ м}^3$$

Задача 5-2. В дне цилиндрического сосуда имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Диаметр сосуда $D = 0{,}5$ м. Найдите зависимость скорости υ понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найдите численное значение этой скорости для высоты $h = 0{,}2$ м.

Решение. Обозначим $S_1 = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения сосуда и υ – скорость течения воды в нем (искомая скорость понижения уровня воды в сосуде); $S_2 = \pi d^2/4$ – площадь поперечного сечения отверстия и u – скорость вытекания воды из отверстия. Используя уравнение Бернулли

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho u^2}{2},$$

получим соотношение, связывающее скорости и высоту:

$$\upsilon^2 + 2gh = u^2.$$

В силу уравнения неразрывности

$$\upsilon S_1 = u S_2,$$

скорость u заменим соотношением

$$u = \upsilon S_1 / S_2 = \upsilon D^2 / d^2,$$

и тогда

$$\upsilon^2 + 2gh = \frac{\upsilon^2 D^4}{d^4}.$$

Решая полученное уравнение, для скорости υ будем иметь

$$\upsilon = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

При $h = 0{,}2$ м численное значение скорости равно $\upsilon = 8{\cdot}10^{-4}$ м/с.

Задача 5-3. Пробковый шарик радиуса $r = 5$ мм всплывает в сосуде, заполненном касторовым маслом. Плотность пробки $\rho_п = 0{,}2\cdot10^3$ кг/м^3, плотность касторового масла $\rho = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3. Чему равны динамическая и кинематическая вязкости касторового масла в условиях опыта, если шарик всплывает с постоянной скоростью $\upsilon = 3{,}5$ см/с?

Решение. При равномерном движении шарика вверх сила Архимеда F_A, также направленная вверх, уравновешивается силой тяжести mg и силой сопротивления Стокса F, причем:

$$F_\text{А} = \rho V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad F = 6\pi\eta\upsilon r.$$

Итак, имеем соотношение

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta\upsilon r + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\text{П} g,$$

из которого находим динамическую вязкость:

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_\text{П}) g r^2}{9\upsilon} = 1{,}09 \text{ Па·с},$$

а затем и кинематическую вязкость:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = 1{,}21\cdot10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Задача 5-4. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом $R = 2$ см вставлен горизонтальный капилляр внутренним радиусом $r = 1$ мм и длиной $l = 2$ см. В сосуд налито касторовое масло, имеющее динамическую вязкость $\eta = 1{,}2$ Па·с и плотность $\rho = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3. Найдите зависимость скорости υ понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром. Определите численное значение этой скорости при $h = 26$ см.

Решение. Скорость понижения уровня касторового масла в сосуде зависит от скорости протекания масла через капилляр. Объем масла, протекающего за время t через капилляр, определим по формуле Пуазейля:

$$V = \frac{\pi r^4 t \,\Delta p}{8l\eta}.$$

Разность давлений на концах капилляра в данном случае обусловлена гидростатическим давлением слоя жидкости:

$$\Delta p = \rho g h.$$

С другой стороны, указанный объем связан со скоростью протекания υ_1 масла через капилляр:

$$V = \pi r^2 \upsilon_1 t.$$

Сравнивая эти соотношения, для скорости υ_1 имеем

$$\upsilon_1 = \frac{r^2 \rho g h}{8l\eta}.$$

Из уравнения неразрывности струи следует:

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon S, \quad \upsilon_1 r^2 = \upsilon R^2,$$

поэтому окончательное выражение для скорости υ понижения уровня в сосуде имеет вид:

$$\upsilon = \frac{r^4 \rho g h}{8l\eta R^2}.$$

Численное значение υ при h = 26 см равно

$$\upsilon = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

Задача 5-5. Стальной шарик ($\rho_c = 7{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3) падает в широком сосуде, заполненном трансформаторным маслом ($\eta = 0{,}8$ Па·с, $\rho_м = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3). Считая, что закон Стокса имеет место при $Re \le 0{,}5$, найдите предельное значение диаметра шарика.

Р е ш е н и е. Число Рейнольдса определяется соотношением

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{\text{м}} \upsilon D}{\eta},$$

где D – характерный линейный размер, в качестве которого в данном случае должен быть взят диаметр шарика d, т. е. $d = D$. Для нахождения предельного значения диаметра шарика необходимо рассчитать установившуюся скорость υ шарика. Следуя задаче 5-3, для расчета скорости υ может быть получено соотношение

$$\upsilon = \frac{2(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{м}}) g r^2}{9\eta}.$$

Учитывая, что $r = d/2$, окончательно получим

$$d^3 = \frac{18 \mathrm{Re} \eta^2}{\rho_{\text{т}}(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{м}}) g} = 4{,}6 \text{ мм}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

5.1. Какие вопросы изучаются в гидромеханике? Какими моделями пользуются в этом разделе?

5.2. Что такое давление? Как формулируется закон Паскаля?

5.3. Что является причиной возникновения выталкивающей силы Архимеда? Как она находится?

5.4. Что называют линией тока, трубкой тока?

5.5. Каков физический смысл уравнения неразрывности для стационарного течения несжимаемой жидкости?

5.6. Как записывается уравнение Бернулли и следствием чего оно является?

5.7. Как находятся статическое давление, динамическое давление, гидростатическое давление?

5.8. К чему приводит наличие вязкости у реальных жидкостей?

5.9. Как определяются динамическая и кинематическая вязкости, и что они характеризуют?

5.10. Как зависит вязкость от температуры?

5.11. Чем отличается ламинарное течение жидкости от турбулентного?

5.12. Что характеризует число Рейнольдса, и как оно определяется?

5.13. Какие соотношения и каким образом могут быть использованы для расчета вязкости?

5.14. Каковы причины возникновения лобового сопротивления?

5.15. Как объясняется возникновение подъемной силы?

5.16. До какой высоты h нужно налить однородную жидкость в цилиндрический сосуд, чтобы сила, с которой жидкость будет давить на боковую поверхность сосуда, была равна силе давления на дно сосуда?

5.17. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

5.18. Какую силу необходимо приложить, чтобы удержать под водой парафиновый шар массой m = 9 кг? Плотность парафина составляет 0,9 от плотности воды.

5.19. В сосуд с водой вставлена трубка с площадью поперечного сечения $S = 2$ см^2. В трубку налили $m = 72$ г масла. Плотность масла $\rho_м$ = 900 кг/м^3. Найдите разность уровней масла и воды.

5.20. Полый шар, наружный объем которого равен V, плавает наполовину погруженным в воду. Плотность воды равна ρ_0, плотность материала шара $\rho_ш$. Найдите объем полости шара $V_п$.

5.21. Динамометр, к которому подвешен кусок сплава, состоящий из меди и серебра, показывает в воздухе T_1 = 2,71 Н, а в воде T_2 = 2,41 Н. Определите массу меди $m_м$ и серебра $m_с$ в этом куске. Плотность меди $\rho_м = 8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, серебра $\rho_с = 10{,}5\cdot10^3$ кг/м^3.

5.22. Полый шар из алюминия, находясь в воде, растягивает пружину динамометра с силой T_1 = 0,25 Н, а в бензине – с силой T_2 = 0,33 Н. Найдите объем полости, если плотность алюминия $\rho_А = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, бензина $\rho_б = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3.

5.23. Льдину толщиной $H = 1{,}5$ м вынесло из реки в океан. Насколько поднялась льдина над поверхностью воды по сравнению с первоначальным уровнем? Плотность льда $\rho_л$ = 0,8 г/см^3, плотность пресной воды ρ_0 = 1 г/см^3, плотность соленой воды $\rho_с$ = 1,03 г/см^3.

5.24. Серебряная ложка в воде весит P = 2 Н. Определите ее объем V, если плотность серебра ρ = 10,5 г/см^3, плотность воды ρ_0 = 1 г/см^3.

5.25. Сплошной металлический шарик радиусом $r = 20$ см был взвешен в воде, затем в некоторой жидкости. Разность показаний весов составила ΔP = 65,7 Н. Определите плотность жидкости, если плотность воды ρ_0 = 1 г/см^3.

5.26. Масляный гидравлический пресс имеет площадь левого поршня $S_1 = 20$ см^2, правого $S_2 = 100$ см^2. На какую высоту опустится левый поршень, если на него поставить гирю массой m = 1,5 кг? Плотность масла ρ = 0,9 г/см^3

5.27. Какое давление создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью υ = 25 м/с? Плотность краски ρ = 800 кг/м^3. Вязкостью краски и потерями пренебречь.

5.28. В бочку заливается вода со скоростью Q = 200 см^3/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения S = 0,8 см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определите уровень воды, который установится в бочке.

5.29. Бак цилиндрической формы площадью основания S_0 = 10 м^2 и объемом V = 100 м^3 заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, Определите время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью s = 8 см^2.

5.30. В дне цилиндрического сосуда диаметром D проделано небольшое круглое отверстие диаметра d, через которое вытекает вода. Запишите зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты этого уровня $\upsilon(h)$.

5.31. В бочку льется из шланга вода. Объем жидкости, поступающий из шланга за единицу времени, есть V_t. В дне бочки имеется круглое отверстие, из которого вода вытекает. При этом уровень жидкости в бочке остается неизменным. Считая бочку цилиндром, рассчитайте диаметр этого отверстия d.

5.32. Определите работу, которая затрачивается на преодоление трения при перемещении воды объемом V = 1,5 м^3 в горизонтальной трубе от сечения с давлением p_1 = 40 кПа до сечения с давлением p_2 = 20 кПа.

5.33. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром $d = 7 \cdot 10^{-5}$мм, если динамическая вязкость воздуха равна $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Па · с?

5.34. Дождевая капля, свободно падая, движется к Земле с ускорением. Но, достигнув предельной скорости, начинает двигаться равномерно. Подумайте, почему? Рассчитайте эту предельную скорость. Для простоты каплю считайте сферой, массу капли примите равной $m = 5 \cdot 10^{-7}$ кг. Динамическая вязкость воздуха $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Па · с.

5.35. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в четыре раза больше плотности материала, из которого он изгтовлен. Определите отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к его весу.

5.36. В некоторой жидкости всплывает с постоянной скоростью шарик. Плотность материала шарика в 3 раза отличается от плотности жидкости. Определите, во сколько раз сила сопротивления, действующая на шарик, больше действующей на него силы тяжести?

5.37. Смесь свинцовых дробинок (плотность $\rho_с = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3) диаметром 4 и 2 мм одновременно опускают в широкий сосуд глубиной $h = 1{,}5$ м с глицерином ($\rho_г = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па · с). Определите, на сколько больше времени потребуется дробинкам меньшего размера, чтобы достичь дна сосуда.

5.38. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1{,}2$ см. Через капилляр вытекает касторовое масло ($\rho = 960$ кг/м^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}99$ Па · с), уровень которого в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 30$ см выше капилляра. Определите время, которое требуется для протекания через капилляр $V = 10$ см^3 масла.

5.39. В боковую поверхность сосуда вставлена горизонтальная трубка радиусом r и длиной l. В сосуде находится жидкость с динамической вязкостью η. Уровень жидкости поддерживается постоянным. Какое время потребуется на то, чтобы из сосуда через трубку вытекла жидкость объемом V?

5.40. Труба рассчитана на потребление воды в объеме V = 500 л/ч. Рассчитайте предельное значение диаметра этой трубы D, при котором поток остается ламинарным.

5.41. С мостика, переброшенного через канал, по которому течет вода, опущена узкая изогнутая трубка, обращенная открытым концом навстречу течению. Вода в трубке поднимается на высоту $h = 150$ мм над уровнем воды в канале. Определите скорость υ течения воды.

5.42. Какова скорость υ истечения жидкости из отверстия в стенке сосуда, если высота уровня жидкости над отверстием $h = 4{,}9$ м? Вязкость жидкости не учитывать.

5.43. Цистерна наполнена водой ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3) и нефтью ($\rho_н = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3). Какова будет вначале скорость υ истечения воды из отверстия в дне, если высота слоя воды $h_1 = 1$ м, а слоя нефти $h_2 = 4$ м? Вязкостью пренебречь.

5.44. Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне заполнен водой ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3) и керосином ($\rho_к = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3). Пренебрегая вязкостью, найдите скорость вытекания воды, если толщина слоя воды $h_1 = 30$ см, а слоя керосина $h_2 = 20$ см.

5.45. На земле стоит цилиндрическая бочка высотой $H = 1$ м и диаметром $D = 70$ см, доверху наполненная водой. На высоте $h = 10$ см в боковой поверхности бочки пробито небольшое отверстие. На какое максимальное расстояние от бочки L будет бить струя воды?

5.46. Найдите скорость течения по трубе углекислого газа, если известно, что за полчаса через поперечное сечение трубы протекает $m = 0{,}51$ кг газа. Плотность газа примите равной $\rho = 7{,}5$ кг/м^3. Диаметр трубы равен $d = 2$ см.

5.47. Считая, что ламинарность движения жидкости (или газа) в цилиндрической трубе сохраняется при $\mathrm{Re} \le 2000$ (если при вычислении Re в качестве величины D возьмите диаметр трубы), покажите, что условия задачи 5.46 соответствуют ламинарному движению. Кинематическую вязкость газа примите равной $\nu = 1{,}33 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Газ считайте идеальной несжимаемой жидкостью.

5.48. В трубе с внутренним диаметром $d = 3$ см течет вода. Определите максимальный массовый расход $Q_{m\,\max}$ воды при ламинарном течении.

5.49. При движении шарика радиусом $r_1 = 2{,}4$ мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости υ_2. При какой скорости шарика радиусом $r_2 = 1$ мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

5.50. Латунный шарик диаметром $d = 0{,}5$ мм падает в глицерине. Определите: а) скорость υ установившегося движения шарика; б) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным?

Практическое занятие № 6

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями специальной теории относительности и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Основу специальной теории относительности образуют два постулата. Согласно принципу относительности Эйнштейна все физические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково. Принцип постоянства скорости света утверждает, что скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света. Постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт. Скорость света в вакууме равна $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ м/с, даже если системы отсчета движутся друг относительно друга.

Постоянство скорости света приводит к тому, что пространство и время оказываются взаимосвязанными, образуя единое пространство – время. Эта взаимосвязь может быть представлена с помощью четырехмерного пространства, по трем осям которого откладываются пространственные координаты x, y, z, а по четвертой оси – время t (точнее временная координата ct, имеющая размерность пространственной координаты).

Явный вид преобразований из неподвижной K в движущуюся со скоростью υ систему координат K' в классическом случае (преобразования Галилея) и релятивистском случае (преобразования Лоренца) имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x - \upsilon t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}. \end{cases}$$

Для скоростей эти преобразования сводятся к соотношениям:

$$u = u' + \upsilon \quad \text{и} \quad u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \upsilon u' / c^2}.$$

Одновременные в неподвижной системе K события в движущейся системе K' становятся неодновременными, если они пространственно разобщены $(x_1 \neq x_2)$, поскольку

$$t_1' = \frac{t_0 - (\beta / c) x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad t_2' = \frac{t_0 - (\beta / c) x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Наблюдается Лоренцево сокращение длины: длина стержня l, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l_0, измеренной в системе, относительно которой он покоится:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Длительность событий в движущейся системе K' увеличивается:

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t_1 - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Следовательно, движущиеся часы идут медленнее покоящихся часов, отсчитывающих собственное время.

В четырехмерном пространстве Эйнштейна инвариантом по отношению к преобразованию системы координат является интервал

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2},$$

где l_{12} – расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли; t_{12} – соответствующий временной промежуток.

Выражение для релятивистского импульса:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = m(\upsilon) \vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon},$$

где m_0 – масса покоя частицы, т.е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое; m – масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью υ. Зависимость массы от скорости имеет вид:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}.$$

Основной закон релятивистской динамики, описывающий движение релятивистской частицы, может быть записан в виде:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \right).$$

Полная энергия релятивистской частицы:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \qquad E = m_0 c^2 + T = E_0 + T.$$

Здесь E_0 – энергия покоя частицы (при $\upsilon = 0$). Она представляет собой внутреннюю энергию частицы, не связанную с ее движением как целого с кинетической энергией T.

Соотношение, связывающее полную энергию и релятивистский импульс частицы:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Всякое изменение энергии тела ΔE сопровождается изменением релятивистской массы тела $\Delta m = \Delta E / c^2$ и, наоборот, всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением энергии тела:

$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Это утверждение носит название закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии.

Примеры решения типовых задач

Задача 6-1. Какую продольную скорость υ нужно сообщить стержню для того, чтобы его длина стала равной половине длины, которую он имеет в состоянии покоя?

Решение. В движущейся системе координат длина стержня l сокращается согласно формуле

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

По условию $l = \frac{1}{2}l_0$, следовательно, выполняются соотношения:

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{1}{2}, \quad 1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{4},$$

а значит, для квадрата скорости запишем

$$\upsilon^2 = \frac{3}{4}c^2\,.$$

Окончательно скорость рассчитаем по следующей формуле:

$$\upsilon = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ \ c.$$

Задача 6-2. С какой скоростью υ должна лететь частица относительно системы отсчета K для того, чтобы промежуток собственного времени $\Delta t'$ был в 10 раз меньше промежутка Δt, отсчитанного по часам системы K?

Решение. В теории относительности

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

С учетом условий задачи преобразуем это соотношение к виду

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0{,}1,$$

и, следовательно,

$$\upsilon = \sqrt{0,99}\ \ c = 0,995c.$$

Задача 6-3. Тело, масса покоя которого $m_0 = 2$ кг, движется со скоростью $\upsilon_0 = 2 \cdot 10^8$ м/с в системе K', перемещающейся относительно системы K со скоростью $\upsilon' = 2 \cdot 10^8$ м/с. Определите скорость тела υ относительно системы K и его массу m в этой системе.

Решение. Согласно правилу сложения скоростей скорость тела υ относительно системы K найдем по формуле:

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'}{c^2}} = 2,77 \text{ м/с}.$$

Зная эту скорость, рассчитаем массу:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 5,2 \text{ кг}.$$

Задача 6-4. Определите скорость, полученную электроном, если он прошел ускоряющую разность потенциалов 1,2 МэВ.

Решение. Сформулированное таким образом условие задачи говорит о том, что кинетическая энергия электрона после ускорения увеличилась на $\Delta E = 1,2$ МэВ $= 1,92 \cdot 10^{-13}$ Дж. Поскольку первоначальная кинетическая энергия может считаться равной нулю, справедливо соотношение

$$T = \Delta E.$$

В теории относительности кинетическая энергия T определяется по формуле

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} - 1 \right),$$

следовательно, исходную скорость определим исходя из условия

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)=\Delta E.$$

Решив полученное уравнение, получим:

$$\upsilon=c\sqrt{1-\left(1+\frac{\Delta E}{m_0c^2}\right)^{-2}}=2{,}86\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Задача 6-5. При ускорении α-частицы в циклическом ускорителе ее скорость увеличивается до υ =2,7·10^8 м/с. На сколько при таком ускорении увеличится масса α-частицы?

Решение. Масса движущейся α-частицы

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Здесь m_0 – масса исходной неподвижной частицы, т. е. ядра атома гелия (He). По таблице Менделеева определим, что m_0 = 4 а.е.м. (атомная единица массы). Воспользовавшись справочными данными, выразим ее в системе СИ (в кг):

$$1\ \text{а.е.м.} = 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

В итоге получим, что

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{0{,}9^2c^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}81}}=2{,}29m_0=1{,}52\cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Задача 6-6. Долетит ли до Земли нестабильная частица с собственным временем жизни τ = 4,5 мкс, которая движется со скоростью $\upsilon=0{,}95c$ с высоты h = 3,9 км?

Р е ш е н и е. Вследствие релятивистского эффекта интервал времени для летящей частицы составит

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Тогда путь, пройденный такой частицей, будет равен

$$h' = \upsilon\tau' = \frac{\upsilon\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 4{,}1\ \text{км}.$$

Поскольку по условию $h < h'$, то частица не долетит до поверхности Земли.

Вопросы и задания для самостоятельного решения

6.1. В чем физическая сущность механического принципа относительности?

6.2. Каковы причины возникновения специальной теории относительности? В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?

6.3. Как записываются преобразования Лоренца? При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?

6.4. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?

6.5. Одновременны ли события в системе K', если в системе K они происходят в одной точке и одновременны; если в системе K события разобщены, но одновременны? Почему?

6.6. Какие следствия вытекают из теории относительности для размеров тел в разных системах отсчета?

6.7. Какие следствия вытекают из теории относительности для длительности событий в разных системах отсчета?

6.8. Как записывается правило сложения скоростей в релятивистской механике? При каких условиях это соотношение переходит в классическое правило сложения скоростей?

6.9. Как определяется интервал между событиями? Что означает тот факт, что интервал является величиной, инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца?

6.10. Как определяется релятивистский импульс? Как может быть записан закон сохранения релятивистского импульса?

6.11. Как находится масса движущегося тела? Может ли частица, обладающая массой покоя, быть разогнана до скорости света?

6.12. Как формулируется основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона классической механики?

6.13. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?

6.14. Что такое полная энергия частицы? Из каких частей она состоит?

6.15. Как записывается закон взаимосвязи массы и энергии? В чем заключается его физическая сущность?

6.16. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью υ относительно инерциальной системы отсчета. При каком значении скорости υ длина стержня в этой системе отсчета будет на η = 0,5 % меньше его собственной длины?

6.17. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит η = 25 %?

6.18. Определите длину стержня l относительно неподвижной системы отсчета, если собственная длина стержня в системе, движущейся со скоростью υ = 0,7 с, равна l_0 = 1 м.

6.19. С какой скоростью двигались в системе отсчета K часы, если за время t = 5,0 с в этой же системе они отстали от часов этой системы на Δt = 0,1 с?

6.20. В космических лучах наблюдаются протоны с энергией $W = 10^{20}$ эВ. Сколько времени понадобится такому протону, чтобы пересечь нашу Галактику диаметром $D = 10^5$ световых лет, если время измерять по часам, летящим вместе с протоном? Для протона $m_p \cdot c^2 = 10^9$ эВ. Считайте, что $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Световым годом называется расстояние, которое проходит световой луч за год, двигаясь со скоростью света (в системе отсчета, связанной с Землей, такой протон пересекает Галактику немногим более чем за 10^5 лет).

6.21. С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $\upsilon = 0{,}6c$, ведется прямая телевизионная передача, транслирующая на экран телевизора циферблат часов. Сколько оборотов сделает на экране секундная стрелка этих часов, если по земным часам прошедшее время составило t = 1 мин?

6.22. Космический корабль летит со скоростью $\upsilon = 0{,}7c$ от одного космического маяка к другому. В момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов? Расстояние между маяками свет проходит за t = 2 мес. Считайте, что маяки не перемещаются друг относительно друга.

6.23. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в K-системе отсчета. Время пролета в K-системе равно $\Delta t = 20$ нс. В системе отсчета K', связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t'$ = 25 нс. Найдите собственную длину стержня.

6.24. Два звездолета движутся навстречу друг другу с выключенными двигателями. Сигнал бортового радиолокатора отражается от встречного звездолета с частотой, в $k = 9$ раз превышающей частоту посланного сигнала. Встречный звездолет пролетит мимо регистрирующего прибора на борту первого звездолета за время $t = 1$ мкс. Найдите собственную длину встречного звездолета.

6.25. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 0{,}5\,c$ и $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Найдите их относительную скорость.

6.26. Тело движется с некоторой скоростью υ относительно движущейся со скоростью c системы отсчета. Рассчитать его скорость относительно неподвижной системы отсчета.

6.27. Тело движется с некоторой скоростью $\upsilon = 0{,}9\,c$ относительно системы отсчета, движущейся со скоростью $\upsilon' = 0{,}9\,c$. Найдите его скорость относительно неподвижной системы отсчета.

6.28. Во сколько раз релятивистская масса частицы, скорость которой отличается от скорости света на $\eta = 0{,}01$ %, превышает ее массу покоя?

6.29. Найдите скорость движения тела, при которой ее масса увеличивается в 10 раз.

6.30. Тело, имеющее массу покоя $m_0 = 1$ кг, движется со скоростью $\upsilon' = 0{,}5\,c$ в системе K', перемещающейся относительно системы K со скоростью $\upsilon_0 = 0{,}2\,c$. Определите импульс тела в обеих системах.

6.31. Определите скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в три раза.

6.32. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от $\upsilon_1 = 0{,}6c$ до $\upsilon_2 = 0{,}8c$?

6.33. Найдите скорость, при которой кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя.

6.34. Найдите скорость протона, обладающего кинетической энергией $T = 500$ МэВ.

6.35. При какой скорости движения υ релятивистское сокращение длины составит 10 %?

6.36. Во сколько раз увеличивается время жизни нестабильной частицы по часам неподвижного наблюдателя, если частицу разогнать до скорости, равной 0,9 с.

6.37. Собственное время жизни некоторой частицы отличается на 1,5 % от времени жизни по неподвижным часам. Определите отношение υ/c.

6.38. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\tau_0 = 10$ нс. Найдите путь, который пройдет эта частица до распада в лабора-торной системе отсчета, где ее время жизни $\tau = 20$ нс.

6.39. Прямоугольный брусок размером 3,3×6,9 см движется с высокой скоростью. При какой скорости движения и в каком направлении прямоугольный брусок превратится в куб? Как скажется движение на объеме тела?

6.40. Электрон движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$. Определите кинетическую энергию и импульс электрона с учетом релятивистского эффекта.

Практическое занятие № 7

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ. СОСТОЯНИЕ И ПРОЦЕССЫ В ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗАХ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями молекулярной физики и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Уравнение Клапейрона – Менделеева, описывающее состояние идеального газа, имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \qquad pV = \nu RT,$$

где $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_\text{A}}$ – количество вещества (число молей вещества). Число частиц, содержащихся в моле любого вещества, одинаково и называется числом Авогадро:

$$N_\text{A} = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Для смеси газов количество вещества и плотность газов определяются соотношениями:

$$\nu = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \ldots, \quad \rho = \frac{m_1 + m_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Давление смеси идеальных газов, согласно закону Дальтона, равно сумме парциальных давлений $p_1, \ldots, p_n$ входящих в нее газов:

$$p = p_1 + \ldots + p_n.$$

Парциальное давление – это давление газа, которое производил бы этот газ, если бы в сосуде, занятом смесью, находился только он один.

Уравнение состояния идеального газа часто записывается через концентрацию молекул $n = N/N_{\text{A}}$:

$$p = nkT,$$

где $k = R/N_{\text{A}}$ – постоянная Больцмана.

Число молекул газа, находящихся в объеме V можно рассчитать по формуле

$$N = \nu N_{\text{A}} = \frac{m}{\mu} N_{\text{A}}.$$

Термодинамическая (абсолютная) температура T (К) и обычная практическая температура t (°С) связаны соотношением

$$T = 273{,}15 + t.$$

Сопоставление основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle^2$$

и уравнение состояния идеального газа

$$p = nkT$$

позволяет связать понятие температуры со средней кинетической энергией движения молекул идеального газа (m_0 – масса одной молекулы, $\left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle$ – средняя квадратичная скорость ее движения). Это соотношение может быть записано и в другом виде:

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle^2 = \frac{2}{3} N E_{\text{к}} = \frac{2}{3} U_{\text{к}},$$

где $E_{\text{к}}$ – кинетическая энергия одной молекулы; $U_{\text{к}}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Сопоставляя это выражение с уравнением Клапейрона – Менделеева, формулы для определения средней кинетической энергии одной молекулы $E_{\text{к}}$ и всех молекул газа $U_{\text{к}}$ приобретают вид:

$$E_к = m_0 \frac{\langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT ,$$

$$U_к = NE_к = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{3}{2} pV .$$

Средние скорости молекул определяются соотношениями:

– наиболее вероятная:

$$\upsilon_{вер} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}};$$

– средняя квадратичная:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}};$$

– средняя арифметическая:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 7-1. В смеси газов находится 30 % кислорода и 70 % гелия (по массе). Определите плотность газа при температуре $T = 320$ К и давлении $p = 0{,}2$ МПа.

Решение. Уравнение Менделеева – Клапейрона для смеси газов имеет вид:

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) RT .$$

Обозначив общую массу газа через m, получим соотношение

$$pV = \left(\frac{0{,}3m}{\mu_1} + \frac{0{,}7m}{\mu_2} \right) RT ,$$

из которого

$$m = \frac{pV}{\left(\frac{0,3}{\mu_1} + \frac{0,7}{\mu_2}\right) RT}.$$

Отсюда для плотности $\rho = \frac{m}{V}$ будем иметь:

$$\rho = \frac{p}{\left(\frac{0,3}{\mu_1} + \frac{0,7}{\mu_2}\right) RT} = 0,4 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 7-2. Открытый сосуд нагрет до температуры $t_2 = 450$ °С. Какая часть массы воздуха осталась в нем по сравнению с тем количеством, какое было при $t_1 = 27$ °С?

Решение. Запишем уравнения Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний с учетом того, что давление неизменно и равно давлению атмосферы p_0, а объем сосуда – V:

$$p_0 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad p_0 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2.$$

Поделив эти соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} = 0,41.$$

Задача 7-3. В баллоне находится газ массой $m_1 = 10$ кг газа при давлении $p_1 = 10$ МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2 = 2,5$ МПа? Температуру газа считать постоянной.

Решение. Запишем уравнения Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT,$$

где V – объем баллона. Поделив эти соотношения друг на друга, и учитывая тот факт, что $m_1 - m_2 = \Delta m$, получим:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_1 - \Delta m}.$$

Из этого соотношения найдем массу взятого из баллона газа:

$$\Delta m = \frac{m_1(p_1 - p_2)}{p_1} = 7{,}5 \text{ кг.}$$

Задача 7-4. В сосуде объемом $V = 2$ л находится углекислый газ (CO_2) массой $m_1 = 6$ г и закись азота (N_2O) массой $m_2 = 4$ г при температуре $t = 127$ °С. Найдите давление p смеси в сосуде.

Решение. Из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}.$$

Рассчитав молярные массы углекислого газа $\mu_1 = 0{,}044$ кг/моль и закиси азота $\mu_2 = 0{,}044$ кг/моль, найдем давление смеси в сосуде:

$$p = 3{,}8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Задача 7-5. Давление газа, занимающего объем $V = 5$ л, составляет $p = 1{,}5$ МПа, концентрация его молекул – $n = 2 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$. Определите: а) температуру газа; б) среднюю кинетическую энергию $U_к$ поступательного движения его молекул.

Решение. Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, найдем температуру газа:

$$T = \frac{p}{nk} = 500 \text{ К.}$$

Подставим полученное значение в формулу для расчета средней кинетической энергии $U_к$ поступательного движения молекул газа:

$$U_к = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{3}{2}pV, \quad U_к = 1{,}125 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Задача 7-6. Какое число молекул N двухатомного газа содержит объем $V = 10$ см^3 при давлении $p = 5{,}3$ кПа и температуре $t = 27$ °С? Какой кинетической энергией поступательного движения обладают эти молекулы?

Р е ш е н и е. Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = NkT.$$

Тогда число молекул

$$N = \frac{pV}{kT} = 1{,}28 \cdot 10^{19}.$$

Кинетическую энергию поступательного движения молекул определим из соотношения

$$U_{\text{к}} = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{3}{2}pV = 0{,}8 \text{ Дж.}$$

Задача 7-7. Плотность некоторого газа равна $\rho = 0{,}082$ кг/м^3 при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 17$ °С. Найдите среднюю квадратичную скорость $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

Р е ш е н и е. Уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

может быть записано через плотность газа $\rho = m/V$ следующим образом:

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT.$$

Воспользовавшись данным соотношением, найдем значение молярной массы рассматриваемого газа:

$$\mu = \frac{\rho RT}{p} = 1{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Тогда средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

7.1. Объясните, почему термодинамический и статистический методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга.

7.2. Что такое термодинамические параметры? Какими основными параметрами определяется состояние данной массы конкретного газа?

7.3. Что представляет из себя модель идеального газа?

7.4. Запишите уравнение Менделеева – Клапейрона для однородного газа и для смеси газов.

7.5. Что такое количество вещества?

7.6. Как находится плотность однородного газа и смеси газов?

7.7. Как из уравнения Менделеева – Клапейрона могут быть получены уравнения изопроцессов?

7.8. Какими графиками могут быть представлены изопроцессы в координатах (p, V), (V, T), (p, T)?

7.9. Каков физический смысл числа Авогадро?

7.10. Как может быть найдено число молекул в сосуде?

7.11. Как может быть найдена концентрация молекул в сосуде?

7.12. Как связаны между собой универсальная газовая постоянная и постоянная Больцмана?

7.13. Какой вид имеет основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов?

7.14. Как находится средняя квадратичная скорость?

7.15. В чем заключается молекулярно-кинетическое объяснение понятия температуры?

7.16. В баллоне находится газ при температуре t_1 = 15 °С. Во сколько раз уменьшится давление газа, если 40 % его выйдет из баллона, а температура при этом понизится на Δt = 8 °С?

7.17. В колбе объемом V = 1 л находится воздух при давлении p = 10^5 Па и температуре T = 300 К. На сколько уменьшится масса колбы с воздухом, если воздух из нее откачать?

7.18. При температуре $t = 27$ °С в сосуде объемом $V = 5$ л содержится азот под давлением $p_1 = 10^5$ Па. Сосуд соединили с другим пустым сосудом вместимостью $V_2 = 3$ л. Найдите плотность ρ газа в сосудах.

7.19. Газ при температуре $T = 200$ К и давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па имеет плотность $\rho = 3{,}85$ кг/м^3. Что это за газ?

7.20. В сосуде объемом $V = 2$ м^3 находится смесь $m_1 = 4$ кг гелия и $m_2 = 2$ кг водорода при температуре $T = 27$ °С. Найдите давление p смеси газов.

7.21. Какой объем занимает смесь азота массой $m_1 = 1$ кг и гелия массой $m_2 = 1$ кг при нормальных условиях?

7.22. Какой объем V_2 займет газ при $t_2 = 77$ °С, если при $t_1 = 27$ °С его объем был $V_1 = 6$ л?

7.23. При температуре $t_1 = 27$ °С давление газа в закрытом сосуде было $p_1 = 75$ кПа. Каким будет давление при температуре $p_2 = -13$ °С?

7.24. При температуре $t_1 = 27$ °С в сосуде емкостью $V = 5$ л содержится азот под давлением $p_1 = 10^5$ Па. Найдите плотность газа ρ в сосуде.

7.25. В сосуде находится $m_1 = 56$ г азота и $m_2 = 10$ г водорода при температуре $t = 10$ °С и давлении $p = 1$ МПа. Найдите объем V сосуда.

7.26. При какой температуре плотность газа будет в 1,5 раза больше его плотности при температуре $T = 402$ К?

7.27. Тонкостенный резиновый шар радиусом $r_1 = 3$ см наполнен воздухом при температуре $t_1 = 27$ °С и нормальном атмосферном давлении. Каким станет радиус r_2 шара, если его опустить в воду при температуре $t_2 = 7$ °С на глубину $h = 30$ м?

7.28. В баллоне находится газ массой $m_1 = 10$ кг газа при давлении $p_1 = 10$ МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2 = 2{,}5$ МПа? Температуру газа считать постоянной.

7.29. Атмосфера Венеры почти полностью состоит из углекислого газа. Температура у поверхности планеты около $t = 500$ °С, а давление около $p = 10$ МПа. Какой объем должен иметь исследовательский зонд массой $m = 1$ т, чтобы плавать в нижних слоях атмосферы Венеры?

7.30. Полый шар с жесткой оболочкой, масса которой $m = 10$ г, наполнен водородом. Объем водорода $V = 10$ л, температура $t = 0$ °С. Найдите давление водорода в шаре, если подъемная сила шара равна нулю. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

7.31. Плотность смеси из неона и аргона при давлении р = 150 кПа и температуре $T = 300$ К равна $\rho = 1{,}8$ кг/м^3. Сколько молей аргона ν_1 содержится в смеси, если масса неона $m_2 = 0{,}01$ кг?

7.32. Температуру воздуха в комнате подняли с $t_1 = 7$ °С до $t_2 = 27$ °С. Какая масса воздуха должна выйти из комнаты, чтобы давление осталось неизменным, $p = 10^5$ Па? Объем воздуха в комнате $V = 50$ м^3.

7.33. В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине объема сосуда. Найдите давление p и плотность ρ водяного пара при температуре $t = 400$ °С, зная, что при этой температуре вся вода обращается в пар.

7.34. В баллоне находится газ, плотность которого $\rho_1 = 2$ кг/м^3 и давление $p_1 = 10^5$ Па. Из баллона откачали часть газа, при этом масса его уменьшилась на $\Delta m = 4$ г, а давление упало до $p_2 = 0{,}6 \cdot 10^5$ Па, температура осталась прежней. Найдите объем баллона.

7.35. В баллоне находится газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 2 \cdot 10^6$ Па. После нагревания газа на $\Delta t = 60$ °С в баллоне осталась половина газа (по массе). Чему стало равно давление газа?

7.36. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема в три раза меньше, чем у поверхности? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура воды в водоеме на различных глубинах одинакова.

7.37. На дне сосуда, наполненного воздухом, лежит полый стальной шарик радиусом $r = 2$ см и массой $m = 5$ г. До какого давления нужно сжать воздух в сосуде, чтобы шарик поднялся вверх? Температура постоянна, $t = 20$ °С.

7.38. В закрытом сосуде емкостью $V = 3$ м^2 находятся $m_1 = 1{,}4$ кг азота и $m_2 = 2$ кг гелия. Определите температуру газовой смеси и парциальное давление p_2 гелия, если парциальное давление азота равно $p_1 = 1{,}3 \cdot 10^5$ Па.

7.39. Какой объем занимает смесь $m_1 = 1$ кг кислорода и $m_2 = 2$ кг гелия при нормальных условиях? Какова молярная масса смеси?

7.40. Найдите молярную массу воздуха, считая, что он состоит по массе из одной части кислорода и трех частей азота.

7.41. В закрытом сосуде вместимостью $V = 20$ л находится водород массой $m_1 = 6$ г и гелий массой $m_2 = 12$ г. Определите давление и молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси $T = 300$ К.

7.42. Определите плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Газы считать идеальными.

7.43. В сосуде находится азот массой $m_1 = 14$ г и водород массой $m_2 = 9$ г при температуре $t = 10$ °С и давлении $p = 1$ МПа. Найдите молярную массу μ смеси и объем V сосуда.

7.44. В сосуде емкостью $V = 50$ л находится азот при температуре $t = 20$ °С. Вследствие утечки газа давление уменьшилось на $p_0 = 60$ кПа. Определите массу m_0 газа, вышедшего из баллона. Температуру считать неизменной.

7.45. В цилиндре площадью поперечного сечения $S = 2{\cdot}10^{-3}$ м^2 под поршнем массой $m = 6$ кг находится воздух. Какой груз m^* надо положить на поршень, чтобы объем воздуха в цилиндре уменьшился в два раза? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

7.46. При изобарическом нагревании газа на $\Delta T = 100$ °С его объем увеличился в 1,2 раза. В каком интервале температур происходило нагревание?

7.47. Открытую пробирку с воздухом, находящимся при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па, медленно нагрели до некоторой температуры, затем герметически закрыли и охладили до $t = 10$ °С. Давление при этом упало до $p = 0{,}7 \cdot 10^5$ Па. До какой температуры была нагрета пробирка?

7.48. Газ нагрет от температуры $t_1 = 27$ °С до $t_2 = 39$ °С. На сколько процентов увеличился объем газа, если давление осталось неизменным?

7.49. В цилиндре под поршнем находится воздух под давлением $p_1 = 2{\cdot}10^5$ Па и при температуре $t_1 = 27$ °С. Какой груз надо положить на поршень после нагревания воздуха до температуры $t_2 = 50$ °С, чтобы объем воздуха в цилиндре был равен первоначальному? Площадь поршня $S = 3{\cdot}10^{-3}$ м^2.

7.50. Некоторый газ, имеющий массу $m = 0{,}012$ кг, находится в объеме $V_1 = 0{,}004$ м^3 при температуре $t_1 = 7$ °С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho_2 = 0{,}6$ кг/м^3. До какой температуры нагрели газ?

7.51. Кислород массой $m = 0{,}01$ кг находится под давлением $p = 3 \cdot 10^5$ Па при температуре $t_1 = 10$ °С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V = 10$ л. Найдите: а) объем и плотность газа до расширения; б) температуру и плотность газа после расширения.

7.52. Два сосуда с объемами $V_1 = 0{,}04$ м^3 и $V_2 = 0{,}02$ м^3 содержат газ, имеющий одинаковую температуру, но разные давления $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па и $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па, соответственно. Определите давление, которое установится после соединения сосудов.

7.53. Баллон содержит сжатый газ при температуре $t_1 = 279$ °С и давлении $p_1 = 2 \cdot 10^6$ Па. Каково будет давление, когда из баллона будет выпущено 30 % массы газа, а температура понизится на $\Delta T = 12$ °С?

7.54. Плотность водорода и плотность метана при некоторых одинаковых условиях соответственно равны $\rho_1 = 0{,}18$ кг/м^3 и $\rho_2 = 1{,}44$ кг/м^3. Вычислите молярную массу метана по этим данным.

7.55. Какова должна быть масса оболочки детского шарика диаметром $d = 25$ см, наполненного водородом, чтобы результирующая подъемная сила шарика была равна нулю, т. е. чтобы шарик находился во взвешенном состоянии? Воздух и водород находятся при нормальных условиях ($p = 105$ Па, $T = 273$ К). Давление внутри шарика равно внешнему давлению. Молярная масса воздуха $\mu_в = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.56. Баллон вместимостью $V = 7$ л содержит смесь гелия и водорода при давлении $p = 700$ кПа. Масса m смеси равна 5 г, массовая доля гелия 0,7. Найдите температуру T смеси.

7.57. Определите плотность смеси, состоящей из $m_1 = 4$ г водорода $m_2 = 14$ г азота и $m_3 = 16$ г кислорода , находящейся при температуре 17 °С и давлении 100 кПа.

7.58. В сосуде емкостью $V = 0{,}04$ м^3 находится $m = 0{,}01$ кг водорода. Какое число молекул содержится в единице объема сосуда и во всем сосуде?

7.59. Определите давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность $\rho = 0{,}01$ кг/м^3, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 480$ м/с.

7.60. Определите наиболее вероятную скорость $\upsilon_{вер}$ молекул газа, плотность которого при давлении $p = 40$ кПа составляет $\rho = 0{,}35$ кг/м^3.

7.61. Определите среднюю кинетическую энергию $U_к$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением $p = 0{,}1$ Па. Концентрация молекул газа $n = 10^{13}$ см$^{-3}$.

7.62. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа при температуре $t = 6000$ °C равна $U_к = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Дж. Какова эта энергия при температурах $t_1 = -200$ °C и $t_2 = 2000$ °C?

7.63. Суммарная энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объемом $V = 20$ л, равна $U_к = 5$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найдите массу азота в баллоне и давление, под которым он находится.

7.64. В колбе вместимостью $V = 100$ см^3 содержится некоторый газ при температуре $T = 300$ К. На сколько понизится давление p газа в колбе, если вследствие утечки из колбы выйдет $N = 10^{23}$ молекул?

7.65. Определите среднее значение кинетической энергии $E_к$ одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 400$ К, а также их средние квадратичные скорости $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ при этой температуре.

7.66. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 461$ м/с. Какое число молекул содержит единица массы этого газа?

7.67. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 450$ м/с. Давление газа $p = 50$ кПа. Найдите плотность ρ газа в этих условиях.

7.68. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ станет равной второй космической скорости $\upsilon_2 = 11{,}2$ км/с?

7.69. При какой температуре T молекулы кислорода имеют такую же среднюю квадратичную скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$, как молекулы водорода при температуре $T_0 = 100$ К?

7.70. Определите среднюю арифметическую скорость $\langle\upsilon\rangle$ молекул газа, если их средняя квадратичная скорость $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ = 1 км/с.

7.71. Во сколько раз средняя квадратичная скорость $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ молекул кислорода больше средней квадратичной скорости пылинки массой $m = 10^{-8}$ г, находящейся среди молекул кислорода?

7.72. Аэростат объемом $V = 300$ м^3 наполняется водородом при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па. Какое время будет производиться наполнение оболочки аэростата, если из баллонов каждую секунду переходит в аэростат $\Delta m = 25$ г водорода? До наполнения газом оболочка аэростата водорода не содержала.

7.73. Закрытый сосуд объемом $V = 10$ см^3 имеет трещину, через которую ежесекундно протекает $\Delta N = 10^6$ частиц газа. Какое время понадобится для наполнения сосуда до нормального давления $p = 10^5$ Па, при температуре $T = 273$ К, если начальное давление в сосуде $p_0 = 0$?

7.74. Колба емкостью $V = 4$ л содержит некоторый газ массой $m = 0{,}6$ г под давлением $p = 200$ кПа. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ молекул газа.

7.75. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул азота $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta V = 50$ м/с?

Практическое занятие № 8

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями молекулярно-кинетической теории и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Тяготение и тепловое движение приводят газ в состояние, при котором его концентрация (а значит, и давление) убывают с высотой. Барометрическая формула дает закон убывания давления с высотой в поле силы тяжести:

$$p = p_0 \exp\left(\frac{-\mu g h}{RT}\right),$$

где p и p_0 – давление газа на высоте h и на уровне Земли, соответственно; g – ускорение свободного падения. Эту формулу можно преобразовать к распределению Больцмана (распределению концентрации молекул в силовом поле):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right), \qquad n = n_0 \exp\left(\frac{-W_p}{kT}\right),$$

где n – концентрация молекул, обладающих потенциальной энергией W_p, n_0 – концентрация молекул с нулевой потенциальной энергией.

Среднее число соударений, испытываемых каждой молекулой за единицу времени, можно рассчитать по формуле:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\,\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость движения молекул. Средняя длина свободного пробега, найденная из соотношения $\langle \lambda \rangle = \langle \upsilon \rangle / \langle z \rangle$, определяется выражением:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

В термодинамически неравновесных системах в результате нарушения полной хаотичности движения молекул возникают особые необратимые процессы, называемые явлениями переноса. Диффузия – обусловленное тепловым движением молекул самопроизвольное выравнивание концентраций в смеси нескольких веществ, зависящее от градиента массы (плотности) и коэффициента диффузии D. В случае теплопроводности происходит направленный перенос внутренней энергии в форме теплоты, пропорциональный градиенту температуры и коэффициенту теплопроводности χ. Внутреннее трение (вязкость) связано с возникновением сил трения между слоями, перемещающимися параллельно друг другу с различными скоростями. Оно зависит от градиента скоростей и коэффициента внутреннего трения (динамической вязкости) η. Коэффициенты переноса D, χ и η, связаны с характеристиками теплового движения молекул соотношениями:

$$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle, \qquad \chi = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho c_V, \qquad \eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho,$$

$$\eta = \rho D, \qquad \frac{\chi}{\eta c_V} = 1.$$

Здесь $\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул; c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа.

Примеры решения типовых задач

Задача 8-1. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна t = 10 °C.

Решение. Барометрическая формула, дающая закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести, имеет вид:

$$p_h = p_0 \exp\left(\frac{-\mu g h}{RT}\right).$$

По условию задачи $p_h = 0{,}6p_0$ и поэтому

$$\ln 0{,}6 = -\frac{\mu g h}{RT}.$$

Учитывая, что средняя молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, найдем искомую высоту:

$$h = \frac{0{,}51RT}{\mu g} = 4{,}2 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Задача 8-2. Найдите среднюю длину свободного пробега молекул газообразного азота, находящегося: а) при нормальных условиях; б) при температуре $t = 0$ °С и давлении $p = 1{,}0$ нПа (такое давление позволяют получать современные вакуумные насосы).

Решение. Среднюю длину свободного пробега молекул газа определим исходя из соотношения

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Поскольку эффективный диаметр молекулы азота $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м – величина табличная, средняя длина свободного пробега молекул газа $\langle \lambda \rangle$ зависит от числа молекул в единице объема:

$$n = \frac{p}{kT},$$

а значит, от величины давления.

При нормальных условиях $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К и поэтому

$$\langle \lambda_0 \rangle = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi d^2 p_0} = 10^{-7} \text{ м,}$$

а при давлении $p = 10^{-9}$ Па и температуре $T = 273$ К:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 10^7 \text{ м.}$$

Задача 8-3. Определите плотность разреженного азота, если средняя длина свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle$ = 5 см. Эффективный диаметр молекулы азота $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.

Р е ш е н и е. Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Эта формула позволяет по исходным данным рассчитать концентрацию молекул *n*. Для проведения дальнейших расчетов необходимо будет связать ее с плотностью разреженного азота.

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V},$$

а концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V}.$$

Определим объем *V* из второго соотношения и подставим его в первое, получим

$$\rho = \frac{mn}{N}.$$

Для определения отношения m/N, равного массе одной молекулы, воспользуемся соотношением

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро. Подставив это соотношение в выражение для плотности, будем иметь:

$$\rho = \frac{\mu n}{N_A} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle\lambda\rangle N_A} = 2{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3.$$

Задача 8-4. Определите коэффициент диффузии D азота, находящегося при температуре T = 300 К и давлении $p = 10^5$ Па.

Решение. Коэффициент диффузии определим по формуле

$$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle.$$

В свою очередь, средняя арифметическая скорость теплового движения молекул $\langle\upsilon\rangle$ определяется его температурой:

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}},$$

а средняя длина свободного пробега молекулы зависит от концентрации n молекул рассматриваемого газа:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Концентрацию молекул найдем из уравнения $p = nkT$ как

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Подставляя приведенные соотношения, для коэффициента диффузии будем иметь:

$$D = \sqrt{\frac{4RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{3\pi d^2 p} = \frac{2kT}{3\pi d^2 p} \cdot \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} = 1{,}54 \cdot 10^{-5} \ \text{м}^2/\text{с}.$$

Задача 8-5. Найдите коэффициент внутреннего трения η для водорода, имеющего температуру t = 17 °C.

Решение. Коэффициент внутреннего трения

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho,$$

где ρ – плотность газа. Из уравнения Менделеева –Клапейрона найдем плотность газа:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT},$$

где m, V, p и T – масса, объем, давление и температура газа.

Среднюю арифметическую скорость молекул газа и среднюю длину свободного пробега молекул рассчитаем по формулам:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad \langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы водорода; n – концентрация молекул.

Давление и температура газа связаны соотношением $p = nkT$, откуда $n = p/kT$. Используя также соотношение $k = R/N_{\text{A}}$ (где N_{A} – число Авогадро) для искомой величины будем иметь:

$$\eta = \frac{4\mu RT}{3\pi^3 d^2 N_{\text{A}}} = 8{,}2 \cdot 10^{-6} \ \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}).$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

8.1. Что позволяет рассчитать барометрическая формула?

8.2. В чем суть распределения Больцмана?

8.3. Что такое эффективный диаметр молекулы?

8.4. Какие опыты подтверждают основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории?

8.5. Что характеризует и как находится средняя длина свободного пробега молекул?

8.6. От чего зависит длина свободного пробега молекул?

8.7. Как рассчитывается среднее число столкновений, испытываемых молекулой в единицу времени?

8.8. Что такое диффузия и вследствие чего она возникает? Какому закону подчиняется это явление?

8.9. Что такое самодиффузия и взаимная диффузия?

8.10. Когда наблюдается явление теплопроводности? Каким законом оно описывается?

8.11. От чего зависит коэффициент теплопроводности?

8.12. Что такое внутреннее трение? Какой закон описывает это явление?

8.13. Как коэффициент вязкости зависит от температуры?

8.14. Как экспериментально можно измерить коэффициент вязкости?

8.15. Как связаны между собой коэффициенты переноса?

8.16. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-8}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м? Температура воздуха $T = 300$ К.

8.17. Каково давление воздуха в шахте на глубине $h = 1$ км, если считать, что температура по всей высоте постоянна и равна $t = 22$ °С, а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

8.18. Определите отношение давления воздуха на высоте $h = 1$ км к давлению на дне скважины глубиной $H = 1$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

8.19. На какой высоте плотность воздуха в e раз (e – основание натуральных логарифмов) меньше по сравнению с плотностью воздуха на уровне земли. Ускорение свободного падения считать не зависящим от высоты.

8.20. На какой высоте концентрация молекул кислорода составляет 50 % от концентрации на уровне моря? Температуру считать постоянной и равной t =100 °С.

8.21. Найдите плотность ρ воздуха: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 4$ км от поверхности Земли. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0$ °С. Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

8.22. Каковы давление p и концентрация n молекул воздуха на высоте $h = 2$ км над уровнем моря. Давление на уровне моря p_0 = 100 кПа, а температура t = 100 °С. Изменением температуры пренебречь.

8.23. У поверхности Земли давление воздуха $p_0 = 10^5$ Па, температура t = 100 °С. Найдите массу воздуха, находящегося в объеме V = 1 м^3 у поверхности Земли и на высоте h = 3 км, считая температуру постоянной.

8.24. В сосуде вместимостью V = 5 л находится водород массой m = 0,5 г. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул водорода в этом сосуде.

8.25. Найдите среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул водорода диаметром $d = 2{,}3\cdot10^{-10}$ м при давлении p = 0,1 Па и температуре T = 100 К.

8.26. Баллон вместимостью $V = 10$ л содержит водород массой $m = 1$ г. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул. Диаметр молекулы водорода $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

8.27. Найдите среднее число $\langle z\rangle$ столкновений, испытываемых молекулой кислорода диаметром $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м при нормальных условиях в течение $t = 1$ с.

8.28. Идеальный газ совершил процесс, в результате которого его давление возросло в q раз. Как и во сколько раз изменились средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени, если процесс: 1) изохорический; 2) изотермический?

8.29. Определите коэффициент теплопроводности χ кислорода при давлении $p = 0{,}1$ МПа и температуре $T = 350$ К, если коэффициент диффузии в этих условиях равен $D = 0{,}3$ см^2/с.

8.30. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости η идеального газа увеличился в 2 раза, а коэффициент диффузии D в 4 раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

8.31. В результате некоторого процесса коэффициент диффузии D идеального газа, находившегося при нормальных условиях, увеличился в 2 раза, а коэффициент вязкости η в 4 раза. На сколько изменилось давление газа?

8.32. Коэффициент теплопроводности χ гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найдите отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

8.33. В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа $\chi = 14$ мВт/(м·К). Найдите коэффициент диффузии D газа.

8.34. В сосуде объемом $V = 5$ л находится $N = 9 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Коэффициент диффузии в этих условиях равен $D = 0{,}3$ см^2/с. Определите коэффициент теплопроводности χ газа.

8.35. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых температурах и давлениях. Найдите для этих газов отношение коэффициентов диффузии, вязкостей и теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

8.36. Средняя длина свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях $\langle\lambda\rangle = 180$ нм. Определите коэффициент диффузии D гелия.

8.37. Коэффициент диффузии кислорода при температуре $t = 0$ °C равен $D = 0{,}19$ см^2/с. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул кислорода.

8.38. Определите коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения кислорода, находящегося при температуре T = 280 К и давлении p = 100 кПа.

8.39. Найдите коэффициент диффузии и динамическую вязкость воздуха при давлении p = 100 кПа и температуре t = 20 °С. Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 3{,}8\cdot 10^{-10}$ м.

8.40. Найдите коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях, если длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ = 0,16 мкм.

8.41. Коэффициент диффузии кислорода D = 0,19 см^2/с при температуре t = 0 °С. Вычислите среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул кислорода.

8.42. При какой температуре средняя длина средняя длина свободного пробега молекул водорода равна $\langle\lambda\rangle$ = 2,2 см, если давление газа p = 0,5 Па. Эффективный диаметр молекул водорода d = 0,28 нм.

8.43. Вычислите коэффициент теплопроводности гелия χ при нормальных условиях.

8.44. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул углекислого газа $\langle\lambda\rangle$ =1 м, если его температура T = 300 К?

8.45. При некоторых условиях коэффициенты диффузии и вязкости водорода равны $D = 1{,}42\cdot 10^{-4}$ м^2/с и $\eta = 8{,}5\cdot 10^{-6}$ Па·с. Определить концентрацию молекул водорода.

8.46. Вычислите динамическую вязкость водорода η при нормальных условиях.

8.47.Определите коэффициенты диффузии D и внутреннего трения η воздуха при давлении p = 0,1 МПа и температуре T = 300 К.

8.48. В сосуде объемом V = 200 см^3 находится азот массой m = 1 г азота. Найдите среднюю длину $\langle\lambda\rangle$ свободного пробега азота. Эффективный диаметр молекул азота d = 0,38 нм.

8.49. Найдите коэффициенты теплопроводности воздуха при температурах t_1 = 17 °С и t_2 = 117 °С. Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 3{,}8\cdot 10^{-10}$ м.

8.50. Найдите коэффициенты теплопроводности и диффузии воздуха при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 3{,}8\cdot 10^{-10}$ м.

Практическое занятие № 9

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Цель работы

Знакомство с основными представлениями термодинамики и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Внутренняя энергия *U* произвольной массы *m* идеального газа, кроме кинетической энергии поступательного движения молекул, учитывает также энергию их вращательного движения, которая зависит от числа составляющих молекулу атомов (степеней свободы молекул *i*):

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT = \frac{i}{2}pV,$$

где μ – их молярная масса; $i = 3$ для одноатомного газа, $i = 5$ для двухатомного газа, $i = 6$ для трех- и многоатомного газов.

Поскольку внутренняя энергия массы конкретного газа является однозначной функцией абсолютной температуры *T*, ее изменение также определяется только разностью температур $\Delta T = T_2 - T_1$:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T = \nu\frac{i}{2}R\Delta T = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right).$$

Первое начало термодинамики в дифференциальной и интегральной формах имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A, \qquad Q = \Delta U + A,$$

где *Q* – сообщенное системе количество теплоты; ΔU – изменение внутренней энергии системы; *A* – работа газа по расширению.

Работа при изменении объема газа также может быть представлена в дифференциальной и интегральной формах:

$$dA = pdV, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

Работа и первое начало термодинамики при изопроцессах

1. Изохорный процесс (V = const):

$$A = 0, \quad Q = \Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T.$$

2. Изобарный процесс (p = const):

$$A = p\Delta V = p\,(V_2 - V_1), \quad Q = \Delta U + A = \left(1 + \frac{i}{2}\right) p(V_2 - V_1).$$

3. Изотермический процесс (T = const):

$$\Delta U = 0, \quad A = Q = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

4. Адиабатический процесс – это процесс, происходящий при отсутствии теплообмена между системой и окружающей средой (Q = 0):

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R(T_1 - T_2), \quad Q = 0.$$

Работа, совершаемая в адиабатическом процессе,

$$A = \frac{RT_1}{(\gamma - 1)}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] = \frac{RT_1}{(\gamma - 1)}\frac{m}{\mu}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{p_1V_1(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)T_1}.$$

Теплоемкость тела $C_{\text{тела}}$, удельная c или молярная C теплоемкости определяются как количество теплоты Q, необходимое для нагрева всего тела (газа), единицы массы газа (m = 1 кг) или одного моля газа (ν = 1 моль) на один градус:

$$C_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{Q}{\Delta T}, \quad c = \frac{\delta Q}{mdT} = \frac{Q}{m\Delta T}, \quad C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{Q}{\nu \Delta T}$$

Между собой данные величины связаны следующими соотношениями:

$$C = \mu c, \quad \nu = \frac{m}{\mu}.$$

Уравнение Майера связывает молярные теплоемкости газов при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_ν:

$$C_p = C_\nu + R, \quad C_\nu = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона):

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где γ – показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_\nu} = \frac{i+2}{2}.$$

Адиабатический процесс является частным случаем политропного процесса, описываемого уравнением $pV^n = \text{const}$, где n – показатель политропы:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_\nu}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 9-1. Газ, занимавший объем $V = 20$ л при нормальных условиях, был изобарно нагрет до $t = 80$ °С. Определите работу расширения газа.

Решение. Работа расширения газа при изобарном процессе:

$$A = \frac{m}{\mu} R\Delta T = \nu R \Delta T .$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона определим число ν молей газа:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 = \nu RT_1,$$

$$\nu = \frac{p_1V_1}{RT_1}.$$

Тогда работа

$$A = \frac{p_1V_1}{RT_1}\cdot R\Delta T = \frac{p_1V_1\Delta T}{T_1} = \frac{10^5\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 80}{273} = 592 \text{ Дж}.$$

Задача 9-2. Кислород массой m = 10 г находится в сосуде под давлением p = 300 кПа и температуре T = 10 °С. После изобарного нагревания газ занял объем V = 10 л. Найдите количество теплоты, полученное газом, изменение внутренней энергии газа и работу, совершенную газом при расширении.

Решение. Вопользовавшись уравнением Менделеева – Клапейрона найдем объем газа до нагревания V_1:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1,$$

$$V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p} = \frac{0{,}01\cdot 8{,}31\cdot 283}{0{,}032\cdot 3\cdot 10^5} = 0{,}0024 \text{ м}^3 = 2{,}4 \text{ л}.$$

Работа, совершенная газом при расширении, составит

$$A = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = 3\cdot 10^5\cdot\left(10 - 2{,}4\right)\cdot 10^{-3} = 2280 \text{ Дж}.$$

Температуру T_2 после нагревания определим исходя из соотношения

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

откуда

$$T_2 = \frac{T_1 \cdot V_2}{V_1} = \frac{283 \cdot 10}{2,4} = 1180\ \text{К}.$$

Для расчета изменения внутренней энергии ΔU используем формулу

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,01}{0,032} \cdot 8,31 \cdot \left(1180 - 283\right) = 5823\ \text{Дж}.$$

Количество теплоты Q определим по первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = 5823 + 2280 = 8103\ \text{Дж}.$$

Задача 9-3. Кислород массой $m = 32$ кг находится в закрытом сосуде под давлением $p = 0,1$ МПа при температуре $T = 290$ К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определите: а) объем сосуда; б) температуру, до которой газ нагрели; в) сообщенное газу количество теплоты.

Решение. Из уравнения Менделеева – Клапейрона найдем объем сосуда:

$$V = \frac{mRT}{\mu P} = 30\ \text{м}^3.$$

Поскольку процесс изохорический, температура, до которой нагрели газ, будет равна

$$T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1} = 4T_1 = 1160\ \text{К}.$$

Расчет количества теплоты, сообщенного газу, произведем по первому началу термодинамики при $i = 5$ (число степеней свободы молекул кислорода) с учетом того, что в изохорическом процессе работа $A = 0$:

$$Q = \Delta U + A = \Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) = 1,75 \cdot 10^7\ \text{Дж}.$$

Задача 9-4. Определите количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.

Решение. В изохорном процессе работа расширения газа равна нулю, поэтому количество теплоты, сообщенное газу при нагревании определяется только изменением его внутренней энергии:

$$Q = \frac{m}{\mu}\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}V(p_2 - p_1) = \frac{5}{2}V\,\Delta p = 5\cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Задача 9-5. Один литр гелия, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется за счет полученного извне тепла до объема двух литров. Найдите: а) работу, совершенную газом при расширении; б) количество сообщенного газу тепла.

Решение. Работа, совершенная газом при изотермическом расширении:

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = p_0V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = 69 \text{ Дж}.$$

Так как в изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, то

$$Q = \Delta U + A = A = 69 \text{ Дж}.$$

Задача 9-6. При адиабатическом сжатии одного моля двухатомного газа была совершена работа $A = 146$ Дж. На сколько увеличилась температура газа при сжатии?

Решение. Адиабатическое сжатие производится без теплообмена с внешней средой, поэтому работа, совершенная над газом:

$$A = +\Delta U = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} = R\Delta T.$$

Отсюда увеличение температуры газа при сжатии

$$\Delta T = \frac{2\mu A}{5mR} = 7 \text{ К}.$$

Задача 9-7. Кислород, занимающий при давлении p_1 = 1 МПа объем V_1 = 5 л, расширяется в n = 3 раза. Определите конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотрите следующие процессы: а) изобарный; б) изотермический; в) адиабатический.

Решение. В изобарном процессе давление остается неизменным ($p_1 = p_2$ = 1 МПа), а работа расширения находится по формуле:

$$A = p_1(V_2 - V_1) = 2p_1V_1 = 10^4 \text{ Дж},$$

$$Q = \frac{m}{\mu}\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}V(p_2 - p_1) = \frac{5}{2}V\Delta p = 5\cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

В изотермическом процессе

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

поэтому конечное давление равно

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2} = \frac{p_1}{n} = 3{,}3\cdot 10^5 \text{ Па},$$

а работа, совершенная газом при расширении:

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln n = p_1V_1\ln n = 5{,}5\cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

В адиабатическом процессе изменения давления и объема подчиняются уравнению Пуассона:

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma,$$

где для двухатомного газа $\gamma = c_p/c_V = 1{,}4$. Поэтому конечное давление равно

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \frac{p_1}{3^{3{,}14}} = 2{,}15\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Работе расширения, совершенную газом в этом процессе, найдем по формуле

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

9.1. Что такое внутренняя энергия идеального газа и какими свойствами она обладает? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?

9.2. Как находится число степеней свободы молекул газа?

9.3. В чем состоит закон Больцмана о равном распределении энергии по степеням свободы молекул?

9.4. Как рассчитывается работа газа при изменении его объема?

9.5. Как может быть графически найдена работа газа по расширению?

9.6. Как записывается первое начало термодинамики применительно к изохорическому и изобарическому процессам?

9.7. Почему нагревание газа при постоянном давлении требует большего количества теплоты, чем его нагревание при постоянном объеме?

9.8. Как из выражения для работы изобарного расширения вытекает физический смысл молярной газовой постоянной R ?

9.9. Как находится работа и записывается первое начало термодинамики применительно к изотермическому процессу?

9.10. Как записывается первое начало термодинамики применительно к адиабатическому процессу? Как меняется температура газа в результате его изотермического и адиабатического расширения?

9.11. Что такое теплоемкость газа? Почему различают теплоемкость газа при постоянном объеме и при постоянном давлении? Каким соотношением они связаны между собой?

9.12. Какой процесс называют адиабатическим, политропическим? Какими уравнениями они описываются? Какое понятие является более общим и почему?

9.13. Как определяется работа при адиабатичесаком процессе?

9.14. Почему адиабата в координатах p,V идет круче, чем изотерма?

9.15. Как из уравнения политропы можно получить уравнения изопроцессов?

9.16. Масса $m = 1$ кг двухатомного газа находится под давлением $p = 80$ кПа и имеет плотность $\rho = 4$ кг/м^3. Найдите энергию теплового движения U молекул газа при этих условиях.

9.17. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях $\rho = 1{,}43$ кг/м^3. Найдите удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа.

9.18. Молярная масса некоторого газа $\mu = 0{,}03$ кг/моль, отношение $c_p/c_V = 1{,}4$. Найдите удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа.

9.19. Определите показатель адиабаты γ идеального газа, который при температуре $T = 350$ К и давлении $p = 0{,}4$ МПа занимает объем $V = 300$ л и имеет теплоемкость $C_{газа} = 857$ Дж/К при постоянном объеме.

9.20. Определите молярную массу μ газа, если разность его удельных теплоемкостей $c_p - c_V = 2{,}08$ кДж/(кг·К).

9.21. В сосуде объемом $V = 6$ л находится при нормальных условиях двухатомный газ. Определите теплоемкость $C_{газа}$ этого газа при постоянном объеме.

9.22. Определите молярные теплоемкости газа, если его удельные теплоемкости $c_V = 10{,}4$ кДж/(кг·К) и $c_p = 14{,}6$ кДж/(кг·К).

9.23. Найдите удельные c_V и c_p и молярные C_V и C_p теплоемкости азота и гелия.

9.24. Трехатомный газ под давлением $p = 240$ кПа и температуре $t = 20$ °С занимает объем $V = 10$ л. Определите теплоемкость $C_{газа}$ этого газа при постоянном давлении.

9.25. Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем $V = 5$ л. Вычислите теплоемкость $C_{газа}$ этого газа при постоянном объеме.

9.26. Определите молярные теплоемкости C_V и C_p смеси двух газов – одноатомного и двухатомного. Количества газов соответственно равны $\nu_1 = 0{,}4$ моль и $\nu_2 = 0{,}2$ моль.

9.27. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p водорода, в котором половина молекул распалась на атомы.

9.28. В сосуде находится смесь двух газов – кислорода массой $m_1 = 6$ г и азота массой $m_2 = 3$ г. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p такой смеси.

9.29. Одноатомный газ, количество вещества которого $\nu_1 = 2$ моль смешан с трехатомным газом, количество вещества которого $\nu_2 = 2$ моль. Определите молярные теплоемкости C_V и C_p этой смеси.

9.30. Смесь газов состоит из гелия массой $m_1 = 5$ г и водорода массой $m_2 = 2$ г. Найдите отношение теплоемкостей C_p/C_V этой смеси.

9.31. Двухатомный газ ($\nu = 2$ моль) нагревают при постоянном объеме до температуры $T_2 = 289$ К. Определите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в $n = 3$ раза.

9.32. При изобарном нагревании некоторого идеального газа ($\nu = 0{,}8$ моль) на $\Delta T = 90$ К ему было сообщено количество теплоты $Q = 2{,}1$ кДж. Определите: а) работу, совершаемую газом; б) изменение внутренней энергии газа; в) величину $\gamma = C_p/C_V$.

9.33**.** Какую работу совершил воздух массой m = 290 г при его изобарном нагревании на ΔT = 20 К и какое количество теплоты ему при этом сообщили?

9.34. Кислород массой m = 160 г при температуре T = 27 °С занимал некоторый объем. При изобарном нагревании этот объем увеличился вдвое. Найдите работу газа при расширении, количество теплоты, которое пошло на нагревание кислорода и изменение внутренней энергии кислорода.

9.35. Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 4$ молей поглощает количество теплоты Q = 2 кДж, при этом температура газа повышается на ΔT = 20 К. Найдите работу газа.

9.36. В сосуде емкостью V = 2 л находится гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа. Стенки сосуда могут выдержать максимальное давление p_2 = 5 МПа. Какое наибольшее количество теплоты можно сообщить газу, чтобы сосуд не взорвался?

9.37. Газ, занимающий объем V = 22 л, под давлением p = 100 кПа был изобарно нагрет от t_1 = 20 °С до t_2 = 100 °С. Определите работу газа.

9.38. Кислород массой m = 300 г при температуре T = 300 К охладили изохорно, при этом давление его уменьшилось в 3 раза. Затем газ изобарно нагрели до первоначальной температуры. Какую работу совершил газ?

9.39. На сколько градусов нужно изобарно нагреть $V = 4$ м^3 воздуха, находящегося в цилиндре при $t_1 = 0$ °С, чтобы при поднятии поршня была совершена работа $A = 10^5$ Дж? Воздух находится под давлением $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

9.40. Некоторое количество газа занимало объем $V = 0{,}01$ м^3 и находилось под давлением $p_1 = 10^5$ Па при температуре $T_1 = 300$ К. Затем газ был нагрет без изменения объема до температуры $T_2 = 320$ К, а после этого нагрет при постоянном давлении до температуры $T_3 = 350$ К (рис. 9.1). Найдите работу, которую совершил газ, переходя из первоначального состояния в конечное.

9.41. Азот массой $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $p = 1$ МПа. Определите: а) работу расширения; б) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ кДж, а начальная температура азота $T_1 = 290$ К.

9.42. Азот массой 2 кг охлаждают при постоянном давлении от 400 до 300 К. Определите изменение внутренней энергии, внешнюю работу и количество выделяемой теплоты.

9.43. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu = 1$ моль сначала охладили, а затем нагрели до первоначальной температуры T, увеличив объем газа в 3 раза (рис. 9.2). Какое количество теплоты отдал газ на участке *1–2*?

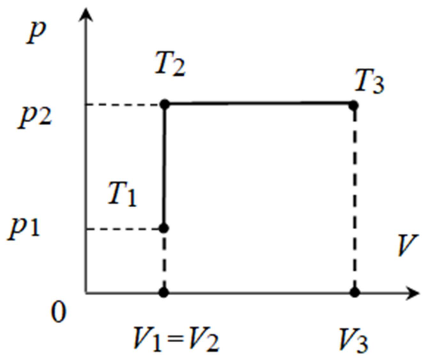

Рис. 9.1. К задаче 9.40

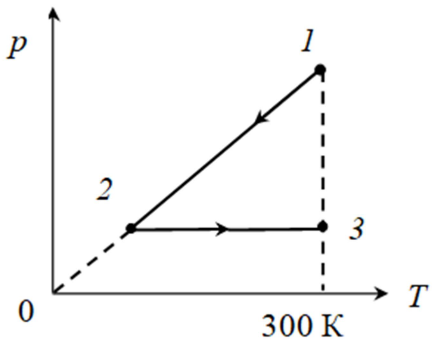

Рис. 9.2. К задаче 9.43

9.44. На рис. 9.3 приведен график зависимости объема одноатомного газа от давления. Внутренняя энергия газа увеличилась на $\Delta U = 100$ кДж. Найдите количество теплоты, сообщенное газу.

9.45. Какое количество теплоты подведено к двум молям одноатомного идеального газа при осуществлении процесса *1–2–3* если в состоянии *2* температура его была равна $T_2 = 400$ К (рис. 9.4).

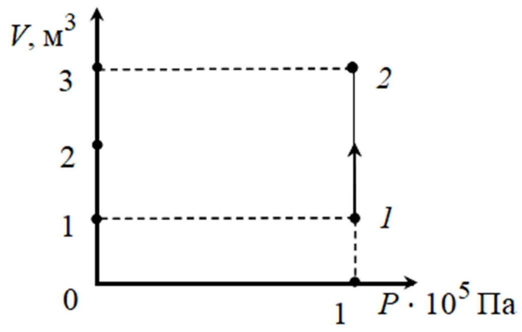

Рис. 9.3. К задаче 9.44

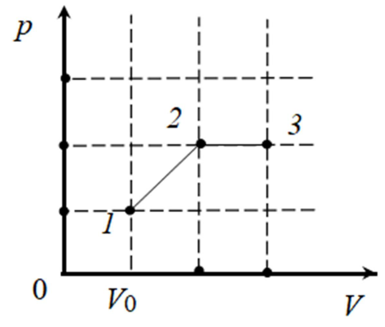

Рис. 9.4. К задаче 9.45

9.46. Сколько теплоты выделится, если азот массой m = 1 г, взятый при температуре T = 280 К под давлением p_1 = 0,1 МПа, изотермически сжать до давления p_2 = 1 МПа?

9.47. Водород массой m = 10 г нагрели на ΔT = 200 К, причем газу была передана теплота Q = 40 кДж. Найдите изменение ΔU внутренней энергии водорода и совершенную им работу A.

9.48. При адиабатическом сжатии кислорода массой m = 1 кг совершена работа A = 100 кДж. Какова будет конечная температура T_2 газа, если до сжатия кислород находился при температуре T_1 = 300 К?

9.49. При адиабатическом расширении кислорода, имевшего температуру T = 320 К, внутренняя энергия уменьшилась на ΔU = 8,4 кДж. Найдите массу кислорода, если его объем в процессе увеличился в 10 раз.

9.50. При адиабатическом сжатии газа его объем V уменьшился в n = 10 раз, а давление p увеличилось в k = 21,4 раза. Определите показатель адиабаты γ этого газа.

9.51. Азот массой m = 2 г, имевший температуру T_1 = 300 К, был адиабатически сжат так, что объем уменьшился в n = 10 раз. Определите конечную температуру T_2 газа и работу сжатия A.

9.52. Азот массой m = 5 г, имевший температуру T_1 = 300 К, был адиабатически сжат так, что объем уменьшился в n = 4 раза. Определите изменение внутренней энергии в этом процессе.

9.53. Водород при нормальных условиях имел объем V_1 = 100 м^3. На сколько изменилась внутренняя энергия U газа при адиабатическом изменении его объема до V_2 = 150 м^3?

9.54. Кислород объемом V = 1 л находится под давлением p = 1 МПа. Определите, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса?

9.55. Кислород объемом $V = 1$ л находится под давлением $p = 1$ МПа. Определите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его объем втрое в результате изотермического процесса.

9. 56. Кислород объемом $V = 1$ л находится под давлением $p = 1$ МПа. Определите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его объем втрое в результате адиабатического процесса.

9.57. Некоторый газ массой $m = 5$ г расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа расширения $A = 1$ кДж. Определите среднюю квадратичную скорость молекул газа.

9.58. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определите изменение внутренней энергии газа, работу сжатия и количество выделившейся теплоты.

9.59. Давление азота, находящегося в сосуде объемом $V = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3, после нагревания возросло на $\Delta p = 2{,}2 \cdot 10^5$ Па. Определите количество теплоты, сообщенное газу.

9.60. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал изотермически.

9.61. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал изобарно.

9.62. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление изменяется от $p_1 = 0{,}1$ МПа до $p_2 = 3{,}5$ МПа. Начальная температура воздуха $t_1 = 40$ °C. Найдите температуру t_2 воздуха в конце сжатия.

9.63. Двухатомный газ, находящийся при давлении $p_1 = 2$ МПа и температуре $t_1 = 27$ °C, сжимается адиабатически от объема V_1 до объема $V_2 = 0{,}5V_1$. Найдите температуру t_2 и давление p_2 газа после сжатия.

9.64. Двухатомный газ, находящийся при давлении $p_1 = 2$ МПа и температуре $t_1 = 27$ °C, сжимается адиабатически от объема V_1 до объема $V_2 = 0{,}5V_1$. Найдите изменение внутренней энергии в результате сжатия.

9.65. Двухатомный газ занимает объем $V_1 = 0{,}5$ л при давлении $p_1 = 50$ кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема V_2 и давления p_2 и затем при постоянном объеме V_2 охлаждается до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p_0 = 100$ кПа. Найдите объем V_2 и давление p_2.

9.66. На сколько градусов нужно изобарно нагреть $V = 4$ м^3 воздуха, находящегося в цилиндре при $t = 0$ °C, чтобы при поднятии поршня была совершена работа $A = 10^5$ Дж? Воздух находится под давлением $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

9.67. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от $p_1 = 200$ кПа до $p_2 = 100$ кПа. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p = 122$ кПа. Найдите отношение C_p/C_V для этого газа.

9.68. Кислород массой $m = 10$ г кислорода, находящийся при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2 = 1{,}4$ л. Найдите давление p_2 и температуру t_2 кислорода после сжатия, если кислород сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найдите работу A сжатия в каждом из этих случаев.

9.69. Азот массой $m = 28$ г, находящийся при температуре $t_1 = 40$ °C и давлении $p_1 = 100$ кПа, сжимается до объема $V_2 = 13$ л. Найдите температуру t_2 и давление p_2 азота после сжатия, если азот сжимается изотермически. Найдите работу A сжатия, изменение внутренней энергии газа и подведенное к газу количество теплоты.

9.70. Азот массой $m = 28$ г, находящийся при температуре $t_1 = 40$ °C и давлении $p_1 = 100$ кПа, сжимается до объема $V_2 = 13$ л. Найдите температуру t_2 и давление p_2 азота после сжатия, если азот сжимается адиабатически. Найдите работу A сжатия и изменение внутренней энергии газа.

Практическое занятие № 10

КРУГОВОЙ ПРОЦЕСС. ЦИКЛ КАРНО. ЭНТРОПИЯ. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Цель занятия

Знакомство с круговыми процессами, в которых могут участвовать газы, и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Круговым процессом (циклом) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На графиках цикл изображается замкнутой кривой. Работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой кривой. Если за цикл совершается положительная работа (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется прямым. Если за цикл совершается отрицательная работа (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется обратным.

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла) определяется соотношением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 и Q_2 – количество теплоты, полученное и отданное системой; A – работа, совершаемая за цикл. Эффективность холодильной машины характеризуют ее холодильным коэффициентом

$$\eta_x = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Обратимый цикл, совершаемый телом, вступающим в теплообмен с двумя тепловыми резервуарами, может состоять только из двух изотерм и двух адиабат. Для идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, термический КПД равен:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому без совершения работы нельзя.

Функция состояния S, дифференциалом dS которой является $\frac{\delta Q}{T}$, называется энтропией. Таким образом,

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \qquad \Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}.$$

Эта формула определяет энтропию с точностью до аддитивной постоянной. Теорема Нернста приравнивает при $T = 0$ эту постоянную нулю. Формула Больцмана связывает энтропию со статистическими характеристиками состояния системы:

$$S = k \ln W,$$

где k – постоянная Больцмана; W – термодинамическая вероятность состояния системы.

Количественным выражением второго начала термодинамики является соотношение

$$TdS \geq dU + \delta A.$$

Второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах и сохранения энтропии при обратимых процессах: в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.

Примеры решения типовых задач

Задача 10-1. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику 70 % количества теплоты, полученной от нагревателя. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно $Q_1 = 5$ кДж. Определите термический КПД цикла и работу, совершенную при полном цикле.

Р е ш е н и е. КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - 0,7Q_1}{Q_1} = 0,3 = 30\ \%.$$

Работа, совершенная при полном цикле:

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1 - 0,7Q_1 = 0,3Q_1 = 1500 \text{ Дж}.$$

Задача 10-2. Температура нагревателя тепловой машины 227 °С. Найдите термический КПД цикла и температуру холодильника, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

Р е ш е н и е. Термический КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{350}{1000} = 0,35 = 35\ \%.$$

Зная КПД цикла после простых алгебраических преобразований, определим температуру T_2 холодильника из формулы:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

$$T_2 = T_1(1-\eta) = 500(1-0,35) = 325 \text{ К} = 52\ ^{\circ}\text{С}.$$

Задача 10-3. Идеальный газ в количестве $\nu = 1$ кмоль совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25$ м^3 до $V_2 = 50$ м^3 и давление изменяется от $p_1 = 100$ кПа до $p_2 = 200$ кПа. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в 2 раза?

Р е ш е н и е. Работа, совершаемая в первом цикле:

$$A_1 = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Наибольшей и наименьшей температурам цикла Карно соответствуют:

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{R}, \quad T_1 = \frac{p_1V_1}{R}.$$

Работа, совершаемая в цикле Карно:

$$A_2 = \frac{m}{\mu}RT_2\frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} = p_2V_2\ln 2 - p_1V_1\ln 2,$$

и поэтому искомое отношение запишем в виде:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\ln 2(p_2V_2 - p_1V_1)}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} = 2{,}1.$$

Задача 10-4. Найдите изменение ΔS энтропии при превращении массы m = 1 г воды (t = 0 °C) в пар ($t_п = 100$ °C).

Р е ш е н и е. Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Рассматриваемый процесс осуществляется в два этапа. При нагревании воды ее удельная теплоемкость c_0 = 4,2 кДж/кг·К, поэтому

$$dQ = mc_0dT.$$

Тогда изменение энтропии в этом процессе

$$\Delta S_1 = mc_0\ln\frac{T_п}{T_0} = 0{,}126 \text{ Дж/К}.$$

В дальнейшем при превращении воды в пар температура не увеличивается, а вся подводимая теплота идет на парообразование(удельная теплота парообразования r = 2,26 мДж/кг), поэтому

$$\Delta S_2 = \frac{mr}{T_п} = 6{,}06 \text{ Дж/К}.$$

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 6{,}186 \text{ Дж/К}.$$

Задача 10-5. Масса $m = 10$ г кислорода нагревается от температуры $t_1 = 50$ °С до температуры $t_2 = 150$ °С. Найдите изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Решение. Изменение энтропии в этих процессах

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 mc\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

С учетом того, что в изохорном процессе теплоемкость кислорода

$$c = c_V = \frac{iR}{2\mu},$$

а в изобарном процессе

$$c = c_p = \frac{(i+2)R}{2\mu},$$

получим:

$$V = \text{const}: \Delta S = 1{,}76 \text{ Дж/К};$$

$$p = \text{const}: \Delta S = 2{,}46 \text{ Дж/К}.$$

Задача 10-6. При температуре 250 К и давлении $1{,}013 \cdot 10^5$ Па двухатомный газ занимает объем 80 л. Как изменится энтропия газа, если давление увеличить вдвое, а температуру повысить до 300 К?

Решение. Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Изменение количества теплоты найдем из уравнения первого закона термодинамики:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_\nu dT + pdV ,$$

где $C_\nu = \frac{5}{2} R$ для двухатомных газов.

Величины $\frac{m}{\mu}$ и p – из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{p_1 V_1}{T_1 R}, \quad p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = \frac{p_1 V_1}{T_1}\frac{T}{V}.$$

Подставив полученные величины в соответствующие выражения, получим:

$$dQ = \frac{p_1 V_1}{T_1}\frac{5R}{2} dT + \frac{p_1 V_1}{T_1}\frac{T}{V} dV = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2} dT + T\frac{dV}{V}\right),$$

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}\right) = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Учитывая связь между величинами $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$, для изменения энтропии запишем следующее соотношение:

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}\right) = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{7}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} - \ln\frac{p_2}{p_1}\right) = -182 \text{ Дж/К}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

10.1. Какие термодинамические процессы называют циклическими? Какие из них могут быть использованы в тепловых двигателях, а какие – в холодильных машинах? Как может быть найден коэффициент полезного действия (холодильный коэффициент) этих устройств?

10.2. Каков принцип действия теплового двигателя и холодильной машины?

10.3. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу? Почему?

10.4. Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?

10.5. Из каких процессов состоит цикл Карно? Является ли он обратимым? Как находится термический коэффициент полезного действия идеального цикла Карно и как он связан с КПД реальных тепловых машин, работающих в тех же условиях?

10.6. Как формулируется теорема Карно?

10.7. Как определяется энтропия? С какими характеристиками состояния системы она связана?

10.8. Как изменяется энтропия в изотермическом и изохорном процессах?

10.9. Как трактуется статистическое понятие энтропии?

10.10. Почему энтропия замкнутой системы может либо возрастать, либо оставаться постоянной? Как может меняться энтропия, если система не является замкнутой?

10.11. Как формулируется и что определяет второе начало термодинамики? Каким образом второе начало термодинамики связано со статистическими закономерностями?

10.12. Как из анализа работы холодильной машины вывести второе начало термодинамики?

10.13. К какому значению стремится энтропия тел системы по мере приближения ее температуры к абсолютному нулю? Какова роль теоремы Нернста в термодинамике?

10.14. Что представляет из себя термодинамическая шкала температур?

10.15. Как можно представить изопроцессы идеального газа на T,S-диаграмме?

10.16. Температура нагревателя тепловой машины t_1 = 117 °С, а холодильника t_2 = 27 °С. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за τ_1 = 1 с, равно Q = 60 кДж. Найдите КПД машины и количество теплоты, отдаваемое холодильнику за τ_2 = 1 с.

10.17. В идеальной тепловой машине за счет каждого килоджоуля энергии, получаемой от нагревателя, совершается работа A = 300 Дж. Определите КПД машины и температуру нагревателя, если температура холодильника T_2 = 280 К.

10.18. В идеальной тепловой машине абсолютная температура нагревателя в 3 раза выше температуры холодильника. Какую работу совершила машина, если она получила от нагревателя $Q = 42$ кДж?

10.19. Идеальная тепловая машина получает от нагревателя, температура которого $T_1 = 500$ К, за один цикл $Q_1 = 3500$ Дж теплоты. Найдите количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику, температура которого $T_2 = 300$ К, и работу машины за один цикл.

10.20. У идеальной тепловой машины температура холодильника равна $T_2 = 300$ К. Какой должна быть температура ее нагревателя, чтобы КПД тепловой машины был равен $\eta = 40$ %?

10.21. Газ совершает цикл Карно. Температура холодильника $T_2 = 290$ К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от $T_1 = 400$ К до $T_1^* = 600$ К?

10.22. Кислород массой $m = 1$ кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа $A^* = 3000$ Дж. Определите работу, совершенную за цикл.

10.23. Идеальный газ работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника $T_2 = 300$ К. Работа изотермического расширения газа составляет $A = 2$ кДж. Определите термический КПД цикла и количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику.

10.24. Многоатомный идеальный газ работает по циклу Карно, при этом в процессе адиабатического расширения объем газа увеличился в $n = 4$ раза. Определите термический КПД цикла.

10.25. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает работу $A = 73{,}5$ кДж. Температура нагревателя $t_1 = 100$ °С, температура холодильника $t_2 = 0$ °С. Найдите КПД η цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

10.26. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % количества теплоты, получаемое от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6{,}28$ кДж. Найдите КПД η цикла и работу A, совершаемую за один цикл.

10.27. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_2 = 0$ °С кипятильнику с водой при температуре $t_1 = 100$ °С. Какую массу m_2 воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар массу $m_1 = 1$ кг воды в кипятильнике?

10.28. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 4$ кДж. Определите работу A газа при протекании цикла, если его термический КПД $\eta = 0{,}1$.

10.29. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определите термический КПД η цикла.

10.30. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, отдает охладителю 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя. Температура T_2 охладителя равна 280 К. Определите температуру T_1 нагревателя.

10.31. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находящийся под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К, нагревают при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}2$ МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарически был сжат до начального объема V_1. Постройте график цикла. Определите температуру T газа для характерных точек цикла и его термический КПД η цикла.

10.32. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в четыре раза выше температуры T_2 охладителя. Какую долю ν количества теплоты, получаемого за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю?

10.33. Определите работу A_2 изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, КПД которого $\eta = 0{,}4$, если работа изотермического расширения равна $A_1 = 8$ Дж.

10.34. Газ, совершающий цикл Карно, отдал охладителю теплоту $Q_2 = 14$ кДж. Определите температуру T_1 нагревателя, если при температуре охладителя $T_2 = 280$ К работа цикла $A = 6$ кДж.

10.35. Газ, являясь рабочим веществом в цикле Карно, получил от нагревателя теплоту $Q_1 = 4{,}38$ кДж и совершил работу $A = 2{,}4$ кДж. Определите температуру нагревателя, если температура охладителя $T_2 = 273$ К.

10.36. Газ, совершающий цикл Карно, отдал охладителю 67 % теплоты, полученной от нагревателя. Определите температуру T_2 охладителя, если температура нагревателя $T_1 = 430$ К.

10.37. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя равна $T_1 = 500$ К, температура охладителя $T_2 = 250$ К. Определите термический КПД η цикла, а также работу A_1, совершенную рабочим веществом при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2 = 70$ Дж.

10.38. Найдите изменение ΔS энтропии при плавлении массы $m = 1$ кг льда ($t = 0$ °С).

10.39. Массу $m = 640$ г расплавленного свинца при температуре плавления $t_{пл}$ вылили на лед ($t = 0$ °С). Найдите изменение ΔS энтропии в этом процессе.

10.40. Найдите изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы $m = 8$ г гелия от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л.

10.41. Азот массой $m = 10{,}5$ г изотермически расширяется от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Найдите изменение ΔS энтропии при этом процессе.

10.42. При нагревании двухатомного газа количеством $\nu = 1$ моль его термодинамическая температура увеличивается от T_1 до $T_2 = 1{,}5T_1$. Найдите изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

10.43. В результате нагревания азота массой $m = 22$ г его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}2T_1$, а энтропия возросла на $\Delta S = 4{,}19$ Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

10.44. Воздух объемом $V_1 = 1$ м^3, находящегося при температуре $t_1 = 0$ °С и давлении $p_1 = 98$ кПа, изотермически расширяется до объема $V_2 = 2V_1$. Найдите изменение ΔS энтропии при этом процессе.

10.45. Смешали воду массой $m_1 = 5$ кг при температуре $T_1 = 280$ К с водой массой $m_2 = 8$ кг при температуре $T_2 = 350$ К. Найдите температуру смеси и изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

10.46. В результате изохорического нагревания водорода массой $m = 1$ г давление газа увеличилось в два раза. Определите изменение ΔS энтропии газа.

10.47. Найдите изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой $m = 4$ г от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 9$ л.

10.48. Кусок льда массой $m = 200$ г, взятый при температуре $t_1 = -10$ °C, был нагрет до температуры $t_2 = 0$ °C и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры $t = 10$ °C. Определите изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

10.49. Лед массой $m_1 = 2$ кг при температуре $t_1 = 0$ °C был превращен в воду той же температуры с помощью пара, имеющего температуру $t = 100$ °C. Определите массу m_2 израсходованного пара. Каково изменение ΔS энтропии системы «лед – пар»?

10.50. Кислород массой $m = 2$ кг увеличил свой объем в $n = 5$ раз один раз изотермически, другой – адиабатически. Найдите изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

10.51. Водород массой $m = 100$ г был изобарически нагрет так, что объем его увеличился в $n = 3$ раза, затем водород был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в $n = 3$ раза. Найдите изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

10.52. Температура в комнате объемом $V = 50$ м^3 поднялась от $t_1 = 15$ °C до $t_2 = 20$ °C. Определите приращение энтропии ΔS воздуха, содержащегося в комнате. Атмосферное давление предполагается неизменно равным $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

10.53. Смешали воду массой $m_1 = 5$ кг и температурой $T_1 = 320$ К с водой массой $m_2 = 8$ кг и температурой $T_2 = 350$ К. Найдите температуру смеси и изменение энтропии ΔS, происходящее при смешивании.

10.54. В результате изохорического нагревания водорода массой $m = 1$ г давление p газа увеличилось в 2 раза. Найдите изменение энтропии ΔS газа.

10.55. Кусок льда массой m = 200 г, взятый при температуре t_1 = –10 °С, был нагрет до t_2 = 0 °С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до t_3 = 10 °С. Определите изменение энтропии ΔS льда.

10.56. Водород массой m = 6,6 г водорода изобарически расширяется от объема V_1 до объема $V_2 = 2\ V_1$. Найдите изменение энтропии ΔS при этом расширении.

10.57. Определите изменение энтропии в процессе испарения воды массой m = 2 кг при температуре T = 100 °С.

10.58. Найдите приращение энтропии водяного пара с ν = 2 моль при увеличении его температуры в 2 раза, если процесс нагревания изохорный. Газ считать идеальным.

10.59. Азот массой m = 56 г нагревают изохорно от t_1 = 10 °С до t_2 = 120 °С. Найдите изменение энтропии газа.

10.60. Найдите изменение энтропии массой водорода m = 2 г при его изобарном расширении от V_1 = 10 л до V_2 = 20 л.

Практическое занятие № 11

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Цель занятия

Знакомство с основными отличиями реальных газов от идеальных, уравнением состояния реального газа и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) для одного моля газа:

$$\left(p+\frac{a}{V_\mu^2}\right)\left(V_\mu - b\right) = RT ,$$

где V_μ – молярный объем газа; p – давление; T – термодинамическая температура; R – универсальная газовая постоянная; a и b – постоянные, различные для разных газов. Поправка a связана с силами межмолекулярного притяжения, поправка b, равная учетверенному собственному объему молекул, характеризует ту часть объема, которая недоступна для движения молекул.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества газа:

$$\left(p+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT ,$$

где V – объем всего газа; μ – молярная масса газа.

Постоянные a и b данного газа связаны с его критическим давлением $p_{кр}$, критической температурой $T_{кр}$ и критическим молярным объемом $V_{\mu кр}$ соотношениями:

$$V_{\mu кр} = 3b, \quad p_{кр} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{кр} = \frac{8a}{27bR}.$$

Эти уравнения можно решить относительно постоянных a и b:

$$a = \frac{27T_{\text{К}}^2 R^2}{64 p_{\text{К}}}, \quad b = \frac{T_{\text{К}} R}{8 p_{\text{К}}}.$$

Значения постоянных Ван-дер-Ваальса a и b, зависящих от природы газа, но не зависящих от температуры, приведены в табл. Б.9 (прил. Б). При $T > T_{\text{кр}}$ изотермы Ван-дер-Ваальса близки к изотермам идеального газа из семейства гипербол.

Абсолютной влажностью воздуха f называется масса водяных паров, содержащихся в 1 м^3 воздуха при данных условиях. Следовательно, абсолютная влажность воздуха равна плотности водяных паров, т. е. $f = \rho_{\text{пара}}$. Из уравнения Менделеева – Клапейрона для водяного пара

$$p_{\text{пара}} = \frac{\rho_{\text{пара}}}{\mu_{\text{пара}}} RT$$

следует, что абсолютная влажность воздуха пропорциональна парциальному давлению водяных паров, т. е. давлению, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы отсутствовали. Относительной влажностью воздуха φ называется отношение абсолютной влажности f к тому количеству водяного пара $f_{\text{н}}$, которое необходимо для насыщения 1 м^3 воздуха при данной температуре, выраженное в процентах. Используя пропорциональность величин f и p, можно написать соотношения:

$$\varphi = \frac{f}{f_{\text{н}}} \cdot 100\,\%, \quad \varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\,\%.$$

Относительная влажность насыщенного пара составляет 100 %, отсутствие водяных паров соответствует нулевой влажности. Точка росы – температура $t_{\text{р}}$, при которой водяные пары, не насыщавшие ранее воздух, становятся насыщенными.

Примеры решения типовых задач

Задача 11-1. Углекислый газ массой m = 88 г находится в сосуде емкостью V = 10 л. Определите внутреннее давление газа и собственный объем молекул.

Р е ш е н и е. По уравнению Ван-дер-Ваальса выражение для расчета добавочного давления p' имеет вид:

$$p' = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}.$$

Для углекислого газа постоянная a = 0,364 $\left(\text{Н} \cdot \text{м}^4\right) \big/ \text{моль}^2$ (табл. Б.9, прил. Б), $\mu = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, поэтому

$$p' = \left(\frac{8{,}8 \cdot 10^{-2}}{4{,}4 \cdot 10^{-2}}\right)^2 \frac{0{,}364}{10^{-4}} = 14{,}56 \text{ кПа}.$$

Постоянная Ван-дер-Ваальса b учитывает поправку на собственный объем молекул V'. Ее численное значение также приведено в табл. Б.9 (прил. Б). Поскольку произведение $\frac{m}{\mu}b$ равно учетверенному объему молекул:

$$\frac{m}{\mu}b = 4V',$$

для искомого объема получим

$$V' = \frac{m}{\mu}\frac{b}{4} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{-2}}{4{,}4 \cdot 10^{-2}} \frac{4{,}27 \cdot 10^{-5}}{4} = 0{,}021 \text{ л}.$$

Задача 11-2. В сосуде под давлением p = 8 МПа содержится кислород, плотность которого ρ = 100 кг/м^3. Считая газ реальным, определите его температуру и сравните ее с температурой идеального газа при тех же условиях.

Р е ш е н и е. Температуру идеального газа найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT_{\text{ид}},$$

которое для плотности газа $\rho = m/V$ перепишем в следующем виде:

$$p\mu = \rho R T_{\text{ид}}.$$

Соответственно, для расчета искомой температуры идеального газа, учитывая, что молярная масса кислорода $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, получим следующее соотношение:

$$T_{\text{ид}} = \frac{p\mu}{\rho R} = 308\ \text{К}.$$

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для произвольного количества газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(\frac{V\mu}{m} - b\right) = RT.$$

Преобразовав данное уравнение с учетом того, что известной величиной является плотность $\rho = \dfrac{m}{V}$, запишем

$$\left(p + \frac{\rho^2 a}{\mu^2}\right)\left(\frac{\mu}{\rho} - b\right) = RT,$$

откуда $T = 324$ К.

Таким образом, температура реального газа оказалась больше температуры идеального газа на $\Delta T = 16$ °С.

Задача 11-3. В объеме $V = 4$ м^3 воздуха при температуре $T = 16$ °С находится $m = 40$ г водяного пара. Найдите относительную влажность.

Р е ш е н и е. Относительную влажность имеющегося воздуха рассчитаем по формуле

$$\varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\,\%.$$

Воспользовавшись уравнением Менделеева – Клапейрона, вычислим давление водяного пара p (молярная масса водяных паров равна $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль):

$$p = \frac{mRT}{\mu V}.$$

С учетом того, что давление насыщенного пара при 16 °С равно p_0 = 1,81 кПа, для расчета относительной влажности запишем следующее соотношение:

$$\varphi = \frac{mRT}{\mu V p_0} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}04 \cdot 8{,}31 \cdot 289}{0{,}018 \cdot 4 \cdot 1{,}81 \cdot 10^3} \cdot 100\ \% = 73{,}7\ \%.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

11.1. На каких расстояниях проявляются силы межмолекулярного взаимодействия?

11.2. Какой зависимостью описывается изменение силы межмолекулярного притяжения от расстояния? Как они могут быть изображены графически?

11.3. Какой зависимостью описывается изменение силы межмолекулярного отталкивания от расстояния? Как они могут быть изображены графически?

11.4. Какая модель используется для косвенного учета сил отталкивания ввиду существования конечного размера молекул?

11.5. Какие поправки внесены Ван-дер-Ваальсом в уравнение Менделеева – Клапейрона?

11.6. Запишите уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа и произвольного количества газа.

11.7. Как может быть учтен собственный объем молекул?

11.8. Как учитываются силы притяжения молекул?

11.9. Какой вид имеют изотермы реальных газов?

11.10. Чем отличаются изотермы Ван-дер-Ваальса от изотерм реальных газов?

11.11. Что такое критическая точка? Чем она характеризуется?

11.12. Можно ли перевести газ, температура которого выше критической, в жидкое состояние путем изотермического сжатия?

11.13. Как могут быть рассчитаны критические параметры?

11.14. Что такое абсолютная и относительная влажность воздуха?

11.15. Что такое точка росы и какие явления с ней связаны?

11.16. В сосуде объемом V = 10 л находится азот массой m = 0,15 кг. Определите внутреннее давление газа и собственный объем молекул.

11.17. В сосуде емкостью V= 0,3 л находится один моль углекислого газа при температуре T = 304 К. Определите давление газа по уравнению Менделеева – Клайперона и по уравнению Ван-дер-Ваальса.

11.18. Определите критическую температуру и критическое давление аргона при следующих значениях постоянных Ван-дер-Ваальса: $a = 1{,}36 \cdot 10^5 \left(\text{Н}\cdot\text{м}^4\right)/\text{моль}^2$ и $b = 0{,}0322\ \text{м}^3/\text{кмоль}$.

11.19. Углекислый газ массой 6,6 кг занимает объем V = 3,75 $м^3$ при давлении p = 0,1 МПа. Определите температуру газа, считая его: а) идеальным; б) реальным.

11.20. В сосуде объемом V = 10 л находится азот массой m = 0,25 кг при температуре t = 27 °С. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул?

11.21. Гелий в количестве ν = 1 кмоль занимает объем V = 0,237 $м^3$ при температуре t = –200 °С. Найдите давление газа, считая его реальным.

11.22. Азот массой m = 20 кг адиабатически расширяется в вакуум от объема V_1 = 1 м до объема V_2 = 3 $м^3$. Найдите понижение температуры ΔT при этом расширении, считая известной для азота постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

11.23. Кислород количеством ν = 1 кмоль кислорода находится при температуре t = 27 °С и давлении p = 5 МПа. Найдите объем газа V, считая, что кислород при данных условиях ведет себя как реальный газ.

11.24. Трехатомный газ в количестве ν = 0,5 моль адиабатически расширяется в вакуум от объема V_1= 0,5 $м^3$ до объема V_2 = 3 $м^3$. Температура при этом понижается на ΔT = 12,2 К. Найдите постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

11.25. Найдите плотность $\rho_{кр}$ гелия в критическом состоянии, считая известным для гелия критические значения $T_{кр}$ и $p_{кр}$.

11.26. Найдите относительную влажность воздуха в комнате при температуре t = 18 °С, если точка росы 10 °С.

11.27. При температуре t_1 =20 °С объем насыщенного водяного пара $V = 1{,}4 \cdot 10^{10}$ $м^3$. Сколько воды выпадает из пара, образуя тучу, если температура снизится до t_2 =11 °С?

11.28. В подвале при температуре t = 8 °С относительная влажность воздуха равна φ_1 = 100 %. На сколько градусов надо повысить температуру воздуха в подвале, чтобы влажность уменьшилась до φ_2 = 60 %?

11.29. Относительная влажность воздуха вечером при температуре $t_1 = 16$ °С равна $\varphi_1 = 55$ %. Выпадет ли роса, если ночью температура понизится до $t_2 = 8$ °С?

11.30. Относительная влажность в комнате при температуре $t = 16$ °С составляет $\varphi_1 = 65$ %. Как она изменится при понижении температуры воздуха на $\Delta T = 4$ К, если парциальное давление водяного пара останется прежним?

11.31. В помещение нужно подать воздух объемом $V = 20000$ м^3 при $t_2 = 18$ °С и относительной влажности $\varphi_1 = 50$ %, забирая его с улицы при темпера-туре $t_2 = 10$ °С и относительной влажности $\varphi_2 = 60$ % Сколько воды надо дополнительно испарить в подаваемый воздух?

11.32. Смешали воздух объемом $V_1 = 1$ м^3 при относительной влажности $\varphi_1 = 20$ % и воздух объемом $V_2 = 2$ м^3 при относительной влажности $\varphi_2 = 30$ %, взятых при одинаковых температурах. Определите его относительную влажность.

11.33. В комнате при температуре $t = 20$ °С относительная влажность $\varphi_1 = 20$ %. Сколько нужно испарить воды для увеличения влажности до $\varphi_2 = 50$ %, если объем комнаты $V = 40$ м^3?

11.34. В комнате объемом $V = 50$ м^3 относительная влажность воздуха $\varphi_1 = 40$ %. Если испарить дополнительную воду с массой $m = 60$ г, то относительная влажность будет $\varphi_2 = 50$ %. Какова при этом будет абсолютная влажность ρ воздуха?

11.35. В сосуде объемом $V = 100$ л при температуре $t = 27$ °С находится воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 30$ %. Какова станет относительная влажность φ_2, если в сосуд внесли $m = 1$ г воды?

Практическое занятие № 12

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями электростатики, в частности зарядами, их взаимодействиями и электрическими полями и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме определяется законом Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где r – расстояние между зарядами; ε_0 – электрическая постоянная. При этом одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Важным свойством кулоновских сил является их аддитивность: сила взаимодействия двух зарядов не изменяется при наличии еще каких-либо зарядов. Поэтому для нахождения силы, действующей на заряд со стороны нескольких зарядов, векторно суммируют все силы, действующие на рассматриваемый заряд со стороны остальных зарядов. В этом заключается принцип суперпозиции действия сил.

Взаимодействие между неподвижными электрическими зарядами осуществляется посредством электростатического поля, характеризуемого либо его силовой характеристикой – напряженностью поля $\vec{E}$, либо его энергетической характеристикой – потенциалом φ. Напряженность $\vec{E}$ электростатического поля в данной точке равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля. Модуль напряженности поля $\vec{E}$ и потенциал φ поля точечного заряда q в точке, находящейся на расстоянии r от него, рассчитываются по формулам:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Направление вектора напряженности поля, создаваемого точечным зарядом, определяется знаком заряда (рис. 12.1).

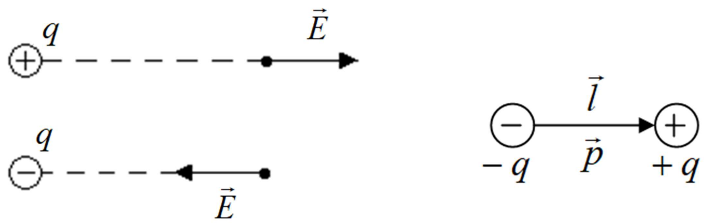

Рис. 12.1. Вектор напряженности поля точечного заряда и заряды, образующие диполь

Для нахождения напряженности поля, создаваемого системой зарядов, используется принцип суперпозиции электростатических полей:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i \ .$$

Напряженность поля $\vec{E}$ позволяет найти силу, действующую на любой точечный заряд q, находящийся в этом поле:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через произвольную поверхность S определяется соотношением

$$\Phi_E = \int\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_S E_n dS \, .$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме утверждает, что поток вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен произведению $1/\varepsilon_0$ на полный заряд, охватываемый поверхностью:

$$\Phi_E = \int\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \, .$$

Главной характеристикой диполя (рис. 12.1) является электрический дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l}$, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Ниже приведены формулы для нахождения:

– линейной τ, поверхностной σ и объемной ρ плотности зарядов:

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \rho = \frac{dq}{dV}.$$

– напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью и двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями (поле в плоском конденсаторе):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 12-1. В центр квадрата, в вершинах которого находится по заряду $q = 10^{-8}$ Кл, помещен отрицательный заряд Q. Найдите величину этого заряда Q, если результирующая сила, действующая на каждый заряд, равна нулю.

Решение. Благодаря симметричному расположению (рис. 12.2), число рассматриваемых зарядов может быть уменьшено до двух: центрального заряда и одного из зарядов, расположенных в вершинах квадрата. Все остальные заряды находятся в аналогичных условиях. К каждому заряду приложены четыре кулоновские силы взаимодействия. По условию задачи векторная сумма этих четырех сил равна нулю, а значит, заряды находятся в равновесии.

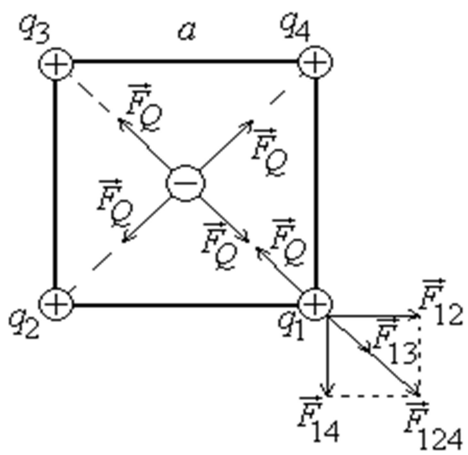

Рис. 12.2. К задаче 12-1

Отметим, что равновесие центрального заряда не зависит от его величины Q, поскольку силы, действующие на него со стороны зарядов, находящихся на одной диагонали, равны по величине, противоположны по направлению, а значит, в сумме равны нулю.

Силы, приложенные к произвольному нецентральному заряду (например, q_1), показаны на рис. 12.2. Здесь $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{14}$ – кулоновские силы отталкивания соседних зарядов, равные по модулю

$$F_{12} = F_{14} = k\frac{q^2}{a^2},$$

где a – сторона квадрата.

Равнодействующая этих двух сил $\vec{F}_{124} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}$ направлена по диагонали квадрата и по модулю равна

$$F_{124} = \sqrt{2}k\frac{q^2}{a^2}.$$

На рассматриваемый заряд q действует также сила отталкивания $\vec{F}_{13}$ от заряда q_3:

$$F_{13} = k\frac{q^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{kq^2}{2a^2},$$

и сила притяжения $\vec{F}_Q$ к заряду Q:

$$F_Q = k\frac{qQ}{\left(a\sqrt{2}/2\right)^2} = \frac{2kqQ}{a^2}.$$

При расчете этих сил учтено, что диагональ квадрата равна $a\sqrt{2}$.

По условию задачи результирующая сила, приложенная к заряду q, равна нулю, т. е. имеет место соотношение

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_Q = 0.$$

В проекциях на ось, направленную по диагонали квадрата вдоль $\vec{F}_{13}$, это соотношение принимает следующий вид:

$$F_{124} + F_{13} - F_Q = 0.$$

Расписав это соотношение в развернутой форме и сократив общие сомножители, получим равенство:

$$\sqrt{2}q + \frac{q}{2} - 2Q = 0,$$

из которого следует, что

$$Q = q\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0{,}957q = 0{,}957 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Заметим, что равновесие зарядов в указанной системе не может быть устойчивым, поскольку при их смещении из положения равновесия не возникают силы, возвращающие их обратно.

Задача 12-2. В вершинах ромба со стороной a и углами $\alpha = 60°$ и $\beta = 120°$ расположены точечные заряды $q_A = q_B = q_C = 2q$ и $q_D = -q$ (рис. 12.3). Определите напряженность поля в центре ромба.

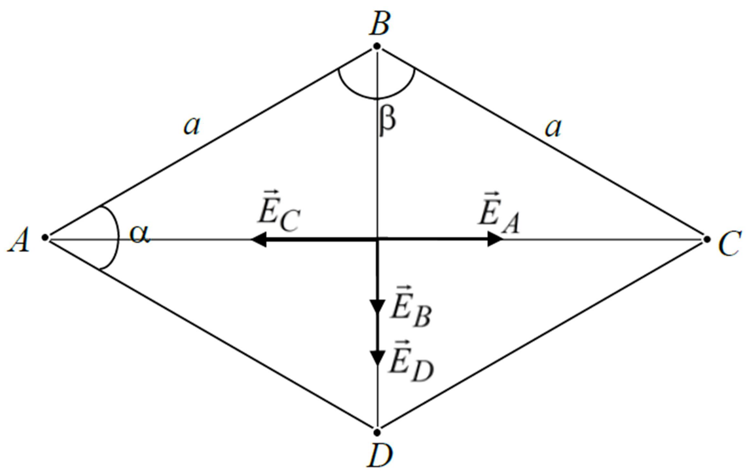

Рис. 12.3. К задаче 12-2

Р е ш е н и е. Напряженность результирующего электрического поля определим векторной суммой напряженностей полей, создаваемых отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D.$$

Поскольку напряженности $\vec{E}_A$ и $\vec{E}_C$ равны по величине и противоположны по направлению, их векторная сумма равна нулю, и тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_D.$$

Так как векторы $\vec{E}_B$ и $\vec{E}_D$ направлены в одну сторону, их модули складываем. С учетом того, что диагональ ромба *BD* является одной из сторон равностороннего треугольника и равна *a*, получим

$$E = E_B + E_D = k\frac{2q}{(a/2)^2} + k\frac{q}{(a/2)^2} = \frac{12kq}{a^2}.$$

Задача 12-3. Тонкая металлическая пластинка, несущая заряд $Q = 10^{-7}$ Кл, равномерно распределенный по поверхности, находится в однородном вертикально направленном электрическом поле, причем поле над пластинкой равно $E_1 = 5 \cdot 10^5$ В/м, а под пластинкой ней – $E_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ В/м (рис. 12.4). Определите массу *m* пластинки, если она покоится в электрическом поле и поле сил тяжести.

Решение. Металлическая пластинка, заряженная положительным зарядом *Q*, создает в пространстве вокруг себя электрическое поле $\vec{E}$, линии напряженности которого направлены над пластинкой вверх, а под ней – вниз. Кроме того, она находится в электрическом поле $\vec{E}_0$, и поэтому результирующее поле над и под пластинкой определим как векторную сумму этих полей:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}.$$

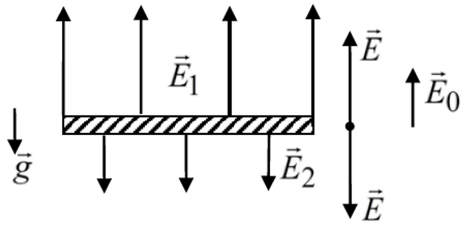

Рис. 12.4. К задаче12-3

Поскольку по условию задачи $E_1 > E_2$, то линии напряженности внешнего поля $\vec{E}_0$ направлены вертикально вверх.

Учитывая направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{E}_0$, запишем следующие соотношения:

$$E_1 = E_0 + E, \qquad -E_2 = E_0 - E,$$

исходя из которых получим, что

$$E_0 = \frac{E_1 - E_2}{2}.$$

Итак, теперь известно, что пластинка, имеющая заряд Q, находится в равновесии в электрическом поле $\vec{E}_0$ и в поле сил тяжести, следовательно $mg = QE_0$.

Тогда искомая масса металлической пластинки

$$m = \frac{Q(E_1 - E_2)}{2g} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}$$

Задача 12-4. Кольцо радиусом $R = 12$ см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Определите напряженность поля в точке *A*, лежащей на оси, проходящей через центр кольца на расстоянии l = 20 см от его плоскости. Какая сила будет действовать на точечный заряд $q = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, если его поместить в эту точку?

Решение. Для нахождения электрического поля в точке *A* воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем заряженное кольцо на бесконечно малые элементы величины *dR*, каждый из которых представляет собой положительный точечный заряд $dq = \tau dR$, расположенный на расстоянии b от рассматриваемой точки *A* и создающий электрическое поле $d\vec{E}$ (рис. 12.5).

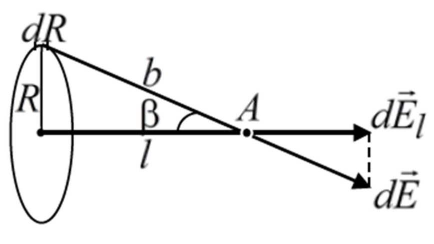

Рис. 12.5. К задаче 12-4

Результирующее поле $\vec{E}$ – векторная сумма полей, создаваемых всеми бесконечно малыми элементами заряженного кольца:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}\,.$$

В силу симметрии векторов $d\vec{E}$ относительно направления l видно, что результирующее поле в точке A будет направлено вдоль оси l, для нахождения которого просуммируем не поля $d\vec{E}$, а их проекции dE_l на направление l:

$$E = \int dE_l = \int \cos\beta\, dE\,.$$

С учетом того, что

$$\cos\beta = \frac{l}{b},\; dE = k\frac{dq}{b^2} = k\frac{\tau dR}{b^2},$$

получим

$$E = \int\limits_0^{2\pi R} k\frac{\tau l dR}{b^3} = \frac{2\pi k\tau l R}{(l^2 + R^2)^{3/2}}\,.$$

После подстановки в данное выражение соответствующих числовых значений $E = 2{,}14\cdot 10^4$ В/м.

Зная напряженность поля в точке A, рассчитаем силу, действующую на заряд $q = 3\cdot 10^{-7}$ Кл, помещенный в эту точку:

$$F = qE = 6{,}42\cdot 10^{-3}\text{ Н.}$$

Сила $\vec{F}$ направлена так же, как и напряженность электрического поля $\vec{E}$: вдоль оси l, проходящей через центр кольца в противоположную от кольца сторону.

Задача 12-5. Молекула воды H_2O представляет собой электрический диполь с дипольным моментом $p = 6{,}2 \cdot 10^{-30}$ Кл · м. Определите напряженность электрического поля, создаваемого молекулой воды в точке, расположенной на оси диполя на расстоянии $r = 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ м от молекулы.

Р е ш е н и е. Электрическое поле молекулы воды аналогично электрическому полю двух точечных зарядов q и $-q$, расположенных друг от друга на некотором расстоянии l (рис. 12.6), которое по порядку величины равно диаметру молекулы. Расстояние r превышает ее размер, т. е. $r >> l$.

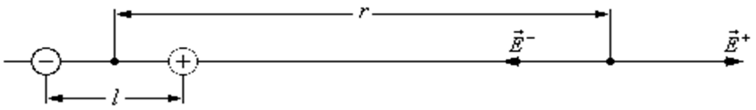

Рис.12.6. К задаче 12-5

Заряды молекулы воды образуют электрический диполь, дипольный момент которого по определению $p = ql$. На основании закона Кулона и принципа суперпозиции электростатических полей можно записать:

$$E = E^+ - E^- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-l/2)^2} - \frac{1}{(r+l/2)^2}\right] = \frac{pr}{2\pi\varepsilon_0(r^2 - l^2/4)^2}$$

Приняв во внимание, что $r >> l$, получим окончательно:

$$E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Электрическое поле диполя на значительных расстояниях от него изменяется обратно пропорционально r^3. Подстановка числовых значений в полученную формулу даст следующее: $E = 8{,}4 \cdot 10^4$ Н/Кл $= 8{,}4 \cdot 10^4$ В/м.

Задача 12-6. В модели атома водорода Дж. Томсона предполагалось, что положительный заряд атома равномерно распределен внутри сферической поверхности радиусом $R = 10^{-8}$ см и равен элементарному заряду $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Электрон (который можно считать точечной частицей с зарядом $-e$) может двигаться внутри шара, не испытывая механического сопротивления. Найдите силу, действующую на электрон, смещенный от центра шара на расстояние $r \le R$. Определите ее значение при $r = R/2$.

Р е ш е н и е. Электрическое поле, создаваемое равномерно заряженным шаром, сферически симметрично. Для расчета напряженности поля на расстоянии r от центра шара применим теорему Гаусса. Выберем для этого замкнутую поверхность в форме сферы радиусом r, центр которой совпадает с центром шара. Внутри этой сферы окажется заряд:

$$q = e\frac{r^3}{R^3}.$$

По теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля через поверхность сферы равен q/ε_0. Но вместе с тем этот поток равен $E{\cdot}4\pi r^2$, где E – модуль вектора напряженности электрического поля на расстоянии r от центра шара. Отсюда следует:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{re}{R^3}.$$

Таким образом, внутри однородного заряженного шара модуль напряженности электрического поля изменяется прямо пропорционально расстоянию r от центра шара. По такому же закону будет изменяться сила $F = -Ee$, действующая на электрон внутри шара. Она будет направлена к центру шара. При $r = R/2$ искомая сила будет равна

$$F = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = 1{,}15\cdot 10^{-8}\ \text{Н}.$$

Эта сила в два раза меньше той, которая действовала бы на электрон на поверхности шара.

Вне шара электрическое поле совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы (рис. 12.7).

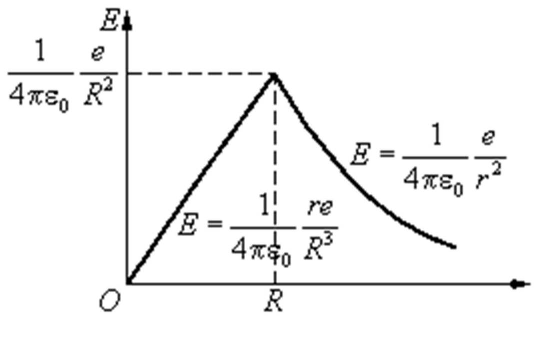

Рис. 12.7. К задаче 12-6

Задача 12-7. Определите напряженность поля E внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной d, в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью ρ. Вычислите модуль напряженности поля вне слоя при $d = 1$ см, $\rho = 1{,}5\cdot 10^{-6}$ Кл/м^3.

Р е ш е н и е. Из соображений симметрии следует, что электрическое поле везде направлено перпендикулярно поверхности слоя. Кроме того, это поле обладает зеркальной симметрией относительно средней плоскости слоя. Поэтому гауссову поверхность удобно выбрать в форме прямого цилиндра, основания которого имеют площадь S и расположены на одинаковых расстояниях $x = d/2$ от середины слоя.

При $x \geq d/2$ внутрь замкнутой цилиндрической поверхности попадает заряд $\rho\, S\, d$. Поток вектора напряженности поля, проходящий через оба торца цилиндра, по теореме Гаусса будет равен $\rho Sd/\varepsilon_0$. С другой стороны, этот поток равен $2ES$, где E – модуль напряженности электрического поля на торцах цилиндра. Следовательно, при $x \geq d/2$ модуль напряженности электрического поля, созданного плоскостью, не зависит от расстояния от плоскости и может быть рассчитан как

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} = 8{,}5 \cdot 10^2 \text{ Н/Кл.}$$

При $x \geq d/2$ внутрь замкнутой цилиндрической поверхности попадает заряд $\rho S 2x$. По теореме Гаусса $2ES = \rho S 2x/\varepsilon_0$, т. е. внутри слоя модуль напряженности электрического поля изменяется по закону $E = \rho x/\varepsilon_0$. Зависимость напряженности поля от расстояния x до плоскости симметрии изображена на рис. 12.8.

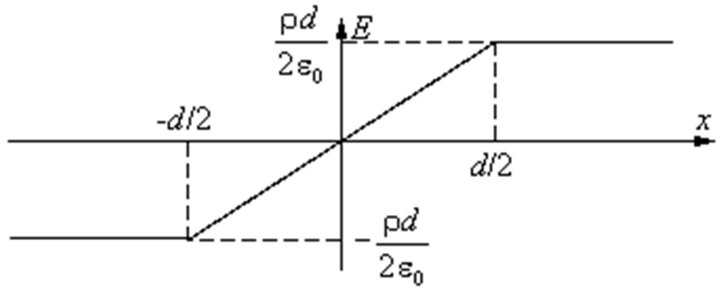

Рис. 12.8. К задаче 12-7

Вопросы и задания для самостоятельного решения

12.1. В чем состоит сущность законов сохранения электрического заряда и квантования электрических зарядов?

12.2. Как находится сила взаимодействия двух точечных зарядов, трех точечных зарядов?

12.3. Как определяется напряженность электростатического поля? Как находится напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами?

12.4. Каким образом графически представляется электростатическое поле? Как направлены линии напряженности поля точечного заряда?

12.5. Что такое электрический диполь? Что является его главной характеристикой?

12.6. Какой вид имеет картина силовых линий поля диполя, и как оно рассчитывается?

12.7. Что происходит с диполем во внешнем электрическом поле?

12.8. Как определяется потенциал электрического поля? В чем он измеряется?

12.9. Как находится работа сил электростатического поля по перемещению заряда?

12.10. Как по напряженности электрического поля можно найти разность потенциалов?

12.11. Что такое градиент потенциала, и как он связан с вектором напряженности?

12.12. Как определяются эквипотенциальные поверхности, и какой вид они имеют для точечных зарядов?

12.13. Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?

12.14. Что такое поток вектора напряженности сквозь некоторую площадку? В каких единицах он измеряется?

12.15. Запишите теорему Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме и раскройте ее физический смысл.

12.16. Во сколько раз сила гравитационного притяжения между двумя протонами меньше силы их электростатического отталкивания?

12.17. На двух одинаковых капельках воды находятся по восемь лишних электронов, причем сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

12.18. На нити подвешен шарик массой $m = 10$ г, имеющий заряд $q = 8 \cdot 10^{-8}$ Кл. Как близко надо поднести к нему снизу одноименный и равный ему заряд, чтобы сила натяжения нити уменьшилась на 10 %? Заряды считать точечными.

12.19. Два шарика одинакового радиуса и веса подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q = 6 \cdot 10^{-7}$ Кл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $\alpha = 60°$. Найдите массу m шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно $l = 0,3$ м?

12.20. Два одинаковых точечных заряда, находясь в вакууме на расстоянии l друг от друга, взаимодействуют с некоторой силой F. Во сколько раз изменится эта сила, если к этой системе добавить еще два таких же заряда так, что все они стали располагаться в вершинах квадрата со стороной l? Как надо изменить сторону квадрата, чтобы сила взаимодействия осталась равной первоначальной?

12.21. Два одинаковых металлических шарика, которые можно считать точечными и чьи заряды отличаются в n раз, находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз нужно изменить расстояние между шариками после того, как их привели в соприкосновение, чтобы величина силы взаимодействия между ними по сравнению с первоначальной не изменилась? Шарики были заряжены одноименными зарядами.

12.22. Решите предыдущую задачу при условии, что шарики были заряжены разноименно.

12.23. На расстоянии $r = 0{,}03$ м друг от друга расположены два точечных заряда $q_1 = 9 \cdot 10^{-10}$ Кл и $q_2 = 36 \cdot 10^{-10}$ Кл. Когда в некоторой точке поместили заряд q_3, то все три заряда оказались в равновесии. Найдите заряд q_3 и расстояние между зарядами q_1 и q_3.

12.24. В вершинах B и C равнобедренного прямоугольного треугольника расположены одинаковые точечные заряды $q_B = q_C = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл (рис. 12.9). Найдите величину и направление силы, действующей на заряд $q_A = \pm 10^{-9}$ Кл. Сторона $AB = a = 2$ см.

12.25. В вершинах B и C равнобедренного прямоугольного треугольника расположены одинаковые по величине, но разные по знаку точечные заряды $q_B = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл, $q_C = -3 \cdot 10^{-9}$ Кл (рис. 12.9). Найдите величину и направление силы, действующей на заряд $q_A = \pm 10^{-9}$ Кл. Сторона $AB = a = 3$ см.

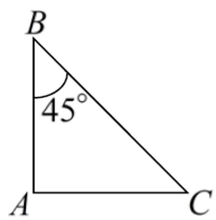

Рис. 12.9. К задачам 12.24 и 12.25, 12.37 и 12.38

12.26. В вершинах B и C прямоугольного треугольника с углами 30° и 60° (рис. 12.10) расположены одинаковые точечные заряды $q_B = q_C = 10^{-9}$ Кл. Найдите величину и направление силы, действующей на заряд $q_A = \pm 10^{-9}$ Кл. Гипотенуза треугольника $BC = a = 1$ см.

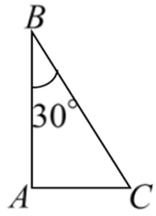

Рис. 12.10. К задачам 12.26 и 12.27, 12.39 и 12.40

12.27. В вершинах B и C прямоугольного треугольника с углами 30° и 60° (рис. 12.10) расположены одинаковые по величине, но разные по знаку точечные заряды $q_B = 10^{-9}$ Кл, $q_C = -10^{-9}$ Кл. Найдите величину и направление силы, действующей на заряд $q_A = \pm 10^{-9}$ Кл. Гипотенуза треугольника $BC = a = 1$ см.

12.28. В вершинах A и C равностороннего треугольника со стороной $a = 1$ см расположены одинаковые по величине точечные заряды $q_A = q_C = 2{\cdot}10^{-8}$ Кл (рис. 12.11). Найдите величину и направление силы, действующей на заряд $q_B = \pm 3{\cdot}10^{-8}$ Кл.

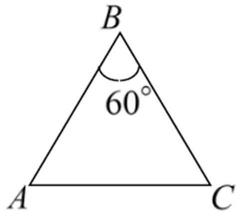

Рис. 12.11. К задачам 12.28 и 12.29, 12.41 и 12.42

12.29. В вершинах A и C равностороннего треугольника со стороной $a = 2$ см расположены одинаковые по величине, но разные по знаку точечные заряды $q_A = 2{\cdot}10^{-8}$ Кл, $q_C = -2{\cdot}10^{-8}$ Кл (рис. 12.11). Найдите величину и направление силы, действующей на заряд $q_B = \pm 3{\cdot}10^{-8}$ Кл.

12.30. Четыре заряда $q_1 = q_2 = 2{\cdot}10^{-8}$ Кл и $q_3 = q_4 = -2{\cdot}10^{-8}$ Кл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Определите силу, действующую на один из положительных зарядов при различных их комбинациях.

12.31. Четыре заряда $q_1 = q_2 = 2{\cdot}10^{-8}$ Кл и $q_3 = q_4 = -2{\cdot}10^{-8}$ Кл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 5{\cdot}10^{-2}$ м. Определите силу, действующую на заряд $Q = 7{\cdot}10^{-8}$ Кл, помещенный в центр квадрата, при различных комбинациях зарядов.

12.32. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a = 0,03 м расположены три положительных и три отрицательных заряда величины $q = 10^{-9}$ Кл. Найдите силу, действующую на положительный заряд $Q = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл, помещенный в центр шестиугольника при различных комбинациях зарядов.

12.33. Расстояние между точечными зарядами $q_1 = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл равно $l = 6$ см. Найдите напряженность электрического поля в точке, лежащей: а) посередине между зарядами; б) на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка на расстоянии $l/2$ от него.

12.34. Расстояние между точечными зарядами $q_1 = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -3 \cdot 10^{-9}$ Кл равно $l = 6$ см. Найдите напряженность электрического поля в точке, лежащей: а) посередине между зарядами; б) на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка на расстоянии $l/2$ от него.

12.35. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -9 \cdot 10^{-9}$ Кл равно $l = 5$ см. Найдите напряженность электрического поля, в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 4$ см от положительного заряда и $r_2 = 3$ см от отрицательного заряда. Как изменится напряженность электрического поля, если отрицательный заряд заменить на равный ему по величине положительный заряд?

12.36. Два точечных заряда $q_1 = 2q$ и $q_2 = -q$ находятся на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. Найдите положение точки, в которой напряженность результирующего электрического поля равна нулю.

12.37. В вершинах B и C равнобедренного прямоугольного треугольника расположены точечные заряды $q_B = 10^{-8}$ Кл, $q_C = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке A (см. рис. 12.9), если известно, что гипотенуза $BC = a = 2$ см.

12.38. В вершинах B и C равнобедренного прямоугольного треугольника расположены точечные заряды $q_B = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_C = -10^{-8}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке A (см. рис. 12.9), если известно, что гипотенуза $BC = a = 1$ см.

12.39. В вершинах B и C прямоугольного треугольника с углами 30° и 60° (см. рис. 12.10) расположены точечные заряды $q_B = 10^{-9}$ Кл и $q_C = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке A, если известно, что сторона $AC = a = 3$ см.

12.40. В вершинах B и C прямоугольного треугольника с углами 30° и 60° (см. рис. 12.10) расположены точечные заряды $q_B = -1{,}5\cdot10^{-9}$ Кл и $q_C = 2\cdot10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке A, если известно, что гипотенуза $BC = a = 5$ см.

12.41. В вершинах A и C равностороннего треугольника со стороной $a = 4$ см расположены одинаковые по величине точечные заряды $q_A = q_C = 2\cdot10^{-8}$ Кл (см. рис. 12.11). Найдите напряженность электрического поля в точке B.

12.42. В вершинах A и C равностороннего треугольника со стороной $a = 4$ см расположены одинаковые по величине, но разные по знаку точечные заряды $q_A = 10^{-8}$ Кл, $q_C = -10^{-8}$ Кл (см. рис. 12.11). Найдите напряженность электрического поля в точке B.

12.43. Три точечных заряда $q_1 = q_2 = 2\cdot10^{-8}$ Кл и $q_3 = -2\cdot10^{-8}$ Кл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 5$ см. Найдите напряженность электрического поля в центре треугольника.

12.44. Четыре точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-8}$ Кл и $q_4 = -3\cdot10^{-8}$ Кл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 5$ см. Найдите напряженность электрического поля в центре квадрата.

12.45. Четыре точечных заряда $q_1 = q_2 = 2\cdot10^{-9}$ Кл и $q_3 = q_4 = -2\cdot10^{-9}$ Кл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 8$ см. Найдите напряженность электрического поля в центре квадрата при различных комбинациях зарядов.

12.46. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 3$ см расположены три положительных и три отрицательных заряда величины $q = 10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях зарядов.

12.47. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 4$ см расположены два положительных и четыре отрицательных заряда величины $q = 2\cdot10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях зарядов.

12.48. Определите заряд шарика массой $m = 2\cdot10^{-2}$ кг, висящего на нити, составляющей угол $\alpha = 30°$ с вертикалью. Нить с шариком помещена в горизонтальное однородное электрическое поле напряженностью $E = 4\cdot10^{4}$ В/м.

12.49. Капелька ртути, имеющая заряд $q = +5e$, помещенная в вертикальное электрическое поле, оказалась в равновесии при напряженности электрического поля $E = 6\cdot10^6$ В/м. Найдите радиус капли.

12.50. Напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 6$ см от поверхности равномерно заряженной сферы радиусом $R = 2$ см, равна $E = 100$ В/м. Определите поверхностную плотность заряда на сфере.

12.51. Заряд сплошного шара радиусом $R = 6$ см равномерно распределен с объемной плотностью $\rho = 10^{-8}$ Кл/м^3. Определите напряженность электрического поля в точках, находящихся: а) на расстоянии $r_1 = 2$ см от центра шара; б) на поверхности шара; в) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра шара.

12.52. В центре металлической сферы радиусом $R = 0{,}1$ м, несущей положительный заряд $q_1 = 10$ нКл, находится маленький шарик с отрицательным зарядом $q_2 = -20$ нКл. Найдите напряженность электрического поля в точках $r_1 = 0{,}5R$ и $r_2 = 10R$.

12.53. Как изменится период колебания металлического шарика массой m, подвешенного на нити длиной l, если его зарядить зарядом $q > 0$ и поместить в однородное электрическое поле напряженностью E, направленное вертикально вниз?

12.54. Как изменится период колебаний металлического шарика массой m, подвешенного на нити длиной l, если его зарядить зарядом $q > 0$ и поместить в однородное электрическое поле с напряженностью E, направленное вертикально вверх?

12.55. Найдите силу, действующую на заряд $q = 10^{-9}$ Кл, если заряд помещен на расстоянии $a = 2$ см: а) от заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau = 2\cdot10^{-7}$ Кл/м; б) от поверхности шара радиусом $R = 1$ см, заряженного с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2; в) от плоскости, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2.

12.56. Бесконечно длинная нить AA заряжена с линейной плотностью заряда $\tau = 3\cdot10^{-6}$ Кл/м, а B – одноименно заряженный шарик (рис. 12.12). Нить с шариком длиной $l = 0{,}12$ м отклонена на угол $\alpha = 30°$, заряд шарика $q = 2\cdot10^{-9}$ Кл. Определите его массу.

12.57. Бесконечная плоскость AA заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-4}$ Кл/м^2, а B – одноименно заряженный шарик с массой $m = 10^{-3}$ кг и зарядом $q = 10^{-9}$ Кл (рис. 12.12). Какой угол с плоскостью образует нить, на которой висит шарик?

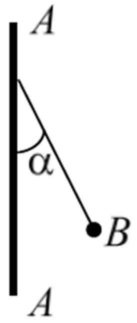

Рис. 12.12. К задачам 12.56 и 12.57

12.58. Две параллельные длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии $l = 0{,}1$ м друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-5}$ Кл/м. Найдите величину и направление результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 0{,}1$ м от каждой нити.

12.59. Две параллельные длинные разноименно заряженные нити расположены на расстоянии $l = 0{,}1$ м друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = 10^{-5}$ Кл/м, $\tau_2 = -10^{-5}$ Кл/м. Найдите величину и направление результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 0{,}1$ м от каждой нити.

12.60. Две параллельные плоскости с одинаковой по величине поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2 расположены на малом расстоянии друг от друга. Определите напряженность электрического поля внутри и вне пластин в случаях: $\sigma_1 = \sigma_2$; $\sigma_1 = -\sigma_2$.

12.61. Три плоскопараллельные пластины, расположенные на малом расстоянии друг от друга, равномерно заряжены. Поверхностные плотности зарядов пластин $\sigma_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2, $\sigma_2 = -5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2, $\sigma_3 = 8 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2. Определите напряженность электрического поля в точках, лежащих между пластинами.

12.62. Две тонкие концентрические сферы, радиусы которых равны $R_1 = 0{,}02$ м и $R_2 = 0{,}03$ м, равномерно заряжены. Их заряды $q_1 = 10^{-8}$ Кл и $q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найдите напряженность поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояния $r_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м, $r_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м, $r_3 = 4 \cdot 10^{-2}$ м.

12.63. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}15$ м равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10^{-7}$ Кл/м. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся на продолжении оси стержня на расстоянии $a = 0{,}1$ м от его конца.

12.64. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}2$ м равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 0{,}1$ м от его конца находится точечный заряд $q = -10^{-8}$ Кл. Найдите силу притяжения заряда к стержню.

12.65. Тонкий прямой стержень длиной $l = 12$ см равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10^{-6}$ Кл/м. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 5$ см от стержня против его середины.

12.66. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}15$ м заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10^{-6}$ Кл/м. На расстоянии $r = 0{,}06$ м от стержня против его середины находится точечный заряд $q = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найдите силу отталкивания заряда от стержня.

12.67. Тонкий прямой стержень длиной $l = 10$ см равномерно заряжен с некоторой линейной плотностью заряда τ. Найдите отношение напряженностей электрического поля в точках, расположенных на перпендикуляре к стержню, проведенному через его середину, на расстоянии $r_1 = 2$ см и $r_2 = 8$ см от него.

12.68. Тонкий прямой стержень длиной $l = 20$ см равномерно заряжен с некоторой линейной плотностью заряда τ. Найдите отношение напряженностей электрического поля в точках, лежащих на продолжении оси стержня на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см от его конца.

12.69. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $q = 10^{-7}$ Кл. На перпендикуляре, восстановленном из его середины, находится точечный заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Определите силу, действующую на точечный заряд со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на расстояние: а) $l_1 = 20$ см; б) $l_2 = 2$ м.

12.70. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью заряда $\tau = 8 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд $q = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл. Определите силу взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

12.71. Тонкое полукольцо радиусом $R = 8$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Определите напряженность электрического поля в центре кривизны полукольца.

12.72. Прямой металлический стержень диаметром $d = 2$ см и длиной $l = 1$ м имеет равномерно распределенный по его поверхности заряд $q = 5\cdot10^{-7}$ Кл. Определите напряженность электрического поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии $a = 1$ см от его поверхности.

12.73. Прямой стержень диаметром $d = 2$ см и длиной $l = 1$ м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд $q = –5\cdot10^{-7}$ Кл. Против середины стержня на расстоянии $a = 1$ см от его поверхности находится точечный заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Определите силу притяжения заряда к стержню.

12.74. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}4$ м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд $q = 8\cdot10^{-8}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся на продолжении его оси на расстоянии $a = 0{,}1$ м от его конца.

12.75. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}25$ м несет равномерно распределенный по его поверхности отрицательный заряд $q = –2\cdot10^{-7}$ Кл. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 0{,}15$ м от его конца находится точечный заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Найдите силу притяжения заряда к стержню.

12.76. Диск радиусом $R = 0{,}1$ м равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 5\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. Определите напряженность электрического поля в точке, находящейся на оси диска на расстоянии $l = 0{,}2$ м от диска.

12.77. Диск радиусом $R = 0{,}2$ м равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 3\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. В точку, находящуюся на оси диска на расстоянии $l = 0{,}1$ м от диска, помещен отрицательный точечный заряд $q = 5\cdot10^{-7}$ Кл. Найдите силу притяжения заряда к диску.

12.78. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 0{,}1$ нКл/м^2 расположена круглая пластина. Нормаль к плоскости пластинки составляет с линиями напряженности угол 30°. Определите поток Φ_E вектора напряженности через эту пластинку, если ее радиус равен 15 см.

12.9 Точечный заряд $q = 3{,}54$ мкКл находится внутри коробки в форме прямоугольного параллелепипеда. Каков суммарный поток Φ_E вектора напряженности электрического поля, создаваемого зарядом q, через стенки коробки?

12.80. Определите поток Φ_E вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $q_1 = 5$ нКл и $q_2 = -2$ нКл.

12.81. Два одинаковых параллельных металлических диска, расположенных в вакууме на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, имеют заряды $q_1 = 5$ нКл и $q_2 = 3$ нКл. Определите поток Φ_E вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность, охватывающую оба диска.

Практическое занятие № 13

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДОВ

Цель занятия

Знакомство с основными представлениями электростатики, в частности с потенциалом – энергетической характеристикой электрического поля, вводимой для описания работы, совершаемой при перемещении зарядов, и изменения их энергии, а также формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Взаимодействие между неподвижными электрическими зарядами осуществляется посредством электростатического поля, характеризуемого наряду с силовой характеристикой (напряженностью поля) энергетической характеристикой (потенциалом φ). Потенциал электростатического поля φ – это скалярная физическая величина, определяемая потенциальной энергией W единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля:

$$\varphi = \frac{W}{q_0}.$$

В частности, потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, определяется соотношением

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал φ поля точечного заряда q в точке, находящейся на расстоянии r от него, рассчитывается по формуле

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Эта формула остается справедливой и в том случае, когда заряд q, создающий поле, равномерно распределен по всему объему или поверхности тела сферической формы, а рассматриваемая точка расположена вне тела или на его поверхности. В частности, потенциал $\varphi_{ш}$ шара радиусом $R_{ш}$ равен потенциалу точек, находящихся на его поверхности, а значит, находится по формуле

$$\varphi_{ш} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_{ш}}.$$

Эквипотенциальные поверхности – это поверхности, во всех точках которых потенциал φ электростатического поля имеет одно и то же значение. Вектор $\vec{E}$ всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям!

Потенциал – величина алгебраическая. Его знак определяется знаком заряда, создающего электростатическое поле. При наложении полей потенциалы складываются алгебраически в отличие от напряженностей, которые складываются векторно. Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей: потенциал поля, создаваемого системой зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, будет равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}.$$

Работа сил электрического поля по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 равна

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Работа A', совершаемая над силами электрического поля, связана с работой A соотношением $A' = -A$.

Между напряженностью и потенциалом электростатического поля существует связь, записываемая как:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi.$$

Знак «–» показывает, что вектор напряженности $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Примеры решения типовых задач

Задача 13-1. Электрический диполь состоит из двух точечных зарядов $q_1 = +(12 \cdot 10)^{-9}$ Кл и $q_2 = -(12 \cdot 10)^{-9}$ Кл (рис. 13.1), находящихся на расстоянии l = 10 см друг от друга. Определите потенциал в точке P_1, расположенной на оси диполя на расстоянии $r_1 = 6$ см от положительного заряда, и в точке P_2, находящейся на таком же расстоянии r_2 = 6 см от того же заряда на линии, перпендикулярной оси диполя и проходящей через q_1.

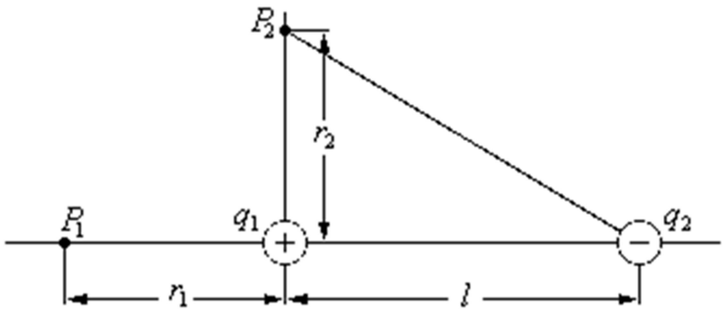

Рис. 13.1. К задаче 13-1

Решение. Согласно принципу суперпозиции, потенциал, создаваемый в некоторой точке системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке отдельными зарядами. Потенциал электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r определим по формуле

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Положительный заряд q_1 создает в точках P_1 и P_2 одинаковые потенциалы:

$$\varphi_1^+ = \varphi_2^+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 1800 \text{ В}.$$

Отрицательный заряд q_2 находится на разных расстояниях от точек P_1 и P_2. Поэтому создаваемые этим зарядом потенциалы φ_1^- и φ_2^- будут разными:

$$\varphi_1^- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(l+r_1)} = -831 \text{ В},$$

$$\varphi_2^- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{l^2+r_2^2}} = -925 \text{ В}.$$

Следовательно, в точке P_1 искомый потенциал будет равен

$$\varphi_1 = \varphi_1^+ + \varphi_1^- = 1800 - 831 = 969 \text{ В},$$

а в точке P_2 он будет равен

$$\varphi_2 = \varphi_2^+ + \varphi_2^- = 1800 - 925 = 875 \text{ В}.$$

Задача 13-2. Найдите разность потенциалов между двумя безграничными заряженными проводящими параллельными пластинами, поверхностная плотность зарядов на которых $\sigma_1 = 6 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2 и $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2. Пластины расположены на расстоянии $d = 40$ см друг от друга.

Решение. По принципу суперпозиции электрическое поле в пространстве между пластинами равно векторной сумме полей обеих пластин. Поскольку обе пластины заряжены положительно, напряженности электрических полей, создаваемых пластинами в пространстве между ними, направлены в противоположные стороны. Примем направление от первой пластины ко второй за положительное. Тогда

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2) = 2{,}26 \cdot 10^2 \text{ Н/Кл}.$$

Разность потенциалов между пластинами конденсатора связана с напряженностью поля внутри конденсатора. Использовав имеющуюся связь, получим

$$\Delta\varphi = Ed = 90{,}4 \text{ В}.$$

Задача 13-3. Два тонких стержня длиной $l = 0,2$ м, равномерно заряженные зарядами $q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -5 \cdot 10^{-8}$ Кл, расположены параллельно друг напротив друга и находятся на расстоянии $a = 0,4$ м. Найдите потенциал электрического поля в центре полученного прямоугольника.

Решение. Электрическое поле в центре прямоугольника (рис. 13.2) создается двумя стержнями с зарядами q_1 и q_2, поэтому для нахождения потенциала результирующего поля воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 - |\varphi_2|.$$

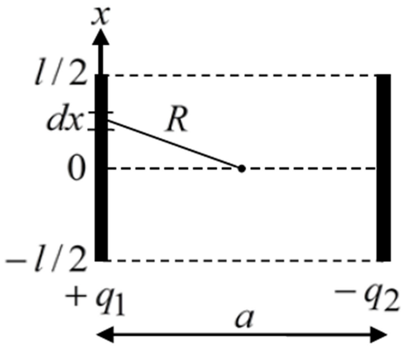

Рис. 13.2. К задаче 13-3

Здесь учтено, что потенциал второго стержня имеет отрицательный знак, поскольку создающий его заряд отрицателен.

Для расчета потенциала φ_1 стержень с зарядом q_1 разобьем на бесконечно малые кусочки длиной dx, каждый из которых можно считать точечным зарядом величины $dq_1 = (q_1/l)dx$. Введем ось x, которую направим вдоль стержня, а начало координат совместим с его серединой. Каждый элементарный заряд, находящийся на расстоянии x от середины стержня, создает в рассматриваемой точке электрическое поле с потенциалом:

$$d\varphi_1 = \frac{kdq_1}{R} = \frac{kdq_1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} = \frac{kq_1 dx}{l\sqrt{x^2 + a^2/4}}.$$

Потенциал электрического поля, создаваемого всем первым стержнем, находим суммированием вкладов от всех элементарных зарядов, которое приводит к интегралу:

$$\varphi_1 = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{kq_1 dx}{l\sqrt{x^2 + a^2/4}} = \frac{kq_1}{l} \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a^2/4} \right| \Bigg|_{-l/2}^{l/2} =$$

$$= \frac{kq_1}{l} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} \right).$$

Для второго стержня может быть написано аналогичное соотношение.

В целом, расчет потенциала электрического поля в центре прямоугольника произведем по формуле

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k(q_1 - q_2)}{l} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} \right).$$

Подставив исходные данные, получим численное значение потенциала:

$$\varphi = -866 \text{ В}.$$

Задача 13-4. Протон, летящий по направлению к ядру двукратно ионизированного неподвижного атома гелия, в некоторой точке поля с напряженностью $E = 10$ кВ/см имеет скорость $\upsilon = 10^3$ м/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру?

Решение. Двукратно ионизированный атом гелия (α-частица) состоит из двух протонов и двух нейтронов. Его заряд равен $+2e$. Протон – положительная частица, заряд и масса которой соответственно равны $q_p = +e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Движение протона в сторону ионизированного атома гелия (рис. 13.3) продолжается до тех пор, пока запас кинетической энергии протона не израсходуется на преодоление силы кулоновского отталкивания, существующей между заряженными частицами.

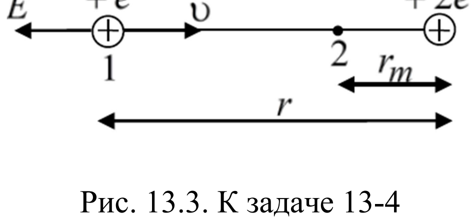

Рис. 13.3. К задаче 13-4

Для расчета искомой величины воспользуемся законом сохранения и превращения энергии:

$$W_2 - W_1 = A,$$

Здесь W_1 и W_2 – начальная и конечная кинетические энергии частицы:

$$W_1 = \frac{m\upsilon^2}{2},\ W_2 = 0;$$

A – работа сил электрического поля, определяемая зарядом движущейся частицы и потенциалами электрического поля, создаваемыми неподвижной частицей в точках *1* и *2* (рис. 13.3):

$$A = e(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Потенциалы поля в точках 1 и 2 зависят от их расстояний r и r_m до неподвижной частицы, имеющей заряд $+2e$:

$$\varphi_1 = k\frac{2e}{r}; \quad \varphi_2 = k\frac{2e}{r_m}.$$

В результате для нахождения искомого минимального расстояния r_m имеем соотношение

$$k \cdot 2e^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_m}\right) = -\frac{m\upsilon^2}{2},$$

из которого следует, что

$$r_m = \left(\frac{1}{r} + \frac{m\upsilon^2}{4ke^2}\right)^{-1}.$$

Расстояние r до точки 1 рассчитывается достаточно просто, поскольку для этой точки известна величина напряженности электрического поля:

$$E = k\frac{2e}{r^2},$$

а значит,

$$r = \sqrt{\frac{2ke}{E}}.$$

Окончательное выражение для нахождения минимального расстояния примет вид:

$$r_m = \left(\sqrt{\frac{E}{2ke}} + \frac{m\upsilon}{4ke^2}\right)^{-1},$$

$$r_m = 4{,}89 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Задача 13-5. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = ax - by - cz$. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$ и докажите, что такое поле является однородным.

Решение. Напряженность электрического поля и потенциал связаны соотношением

$$\vec{E}(x, y, z) = -\operatorname{grad}\varphi(x, y, z) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Удовлетворяющий этому соотношению вектор напряженности электрического поля имеет вид:

$$\vec{E}(x, y, z) = -a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k},$$

не зависящий от координат рассматриваемой точки, а значит, одинаковый для всех точек, где имеется поле.

Величину напряженности электрического поля $E(x, y, z)$ в произвольной точке с координатами x, y, z рассчитаем по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

В данном случае

$$E = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

т. е. величина напряженности электрического поля не зависит от координаты точки и одинакова во всех точках. Итак, вектор $\vec{E}$ во всех точках имеет одинаковую величину и направление, а значит, данное электрическое поле является однородным.

Вопросы и задания для самостоятельного решения

13.1. Как определяется потенциал электрического поля? В чем он измеряется?

13.2. Как находится взаимная потенциальная энергия двух зарядов?

13.3. По какой формуле рассчитывается потенциал поля точечного заряда?

13.4. Как формулируется принцип суперпозиции электрических полей? В чем проявляется отличие его использования для напряженностей и потенциалов?

13.5. Как рассчитывается потенциал электрического поля, создаваемого несколькими точечными электрическими зарядами?

13.6. По какой формуле рассчитывается потенциал шара?

13.7. Что такое эквипотенциальные поверхности? Какой вид они имеют в случае поля, созданного точечным зарядом?

13.8. Что такое эквипотенциальные поверхности? Какой вид они имеют в случае поля, созданного заряженной сферической поверхностью?

13.9. Как направлен вектор $\vec{E}$ по отношению к эквипотенциальным поверхностям?

13.10. Как находится работа сил электростатического поля по перемещению заряда?

13.11. Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?

13.12. Как связана работа, совершаемая над силами электрического поля, с работой, совершаемой силами электрического поля?

13.13. Как находится разность потенциалов по напряженности электрического поля?

13.14. Что такое градиент потенциала, и как он связан с вектором напряженности?

13.15. Как можно рассчитать напряженность электростатического поля, если известно распределение потенциала в пространстве?

13.16. Определите разность потенциалов электрического поля между точками, находящимися на расстояниях $r_1 = 0{,}1$ м и $r_2 = 0{,}3$ м от каждого из двух точечных зарядов q_A и q_B, расположенных на расстоянии $a = 0{,}1$ м друг от друга (рис. 13.4). Задачу решить для двух случаев: а) $q_A = q_B = 2\cdot10^{-9}$ Кл; б) $q_A = 2\cdot10^{-9}$ Кл, $q_B = -2\cdot10^{-9}$ Кл.

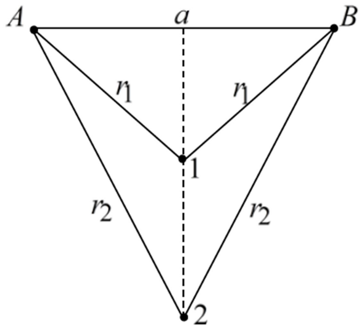

Рис. 13.4. К задаче 13.16

13.17. Четыре заряда $q_1 = q_2 = 3\cdot10^{-9}$ Кл и $q_3 = q_4 = -3\cdot10^{-9}$ Кл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}05$ м. Определите разность потенциалов электрического поля между точкой, лежащей в центре квадрата и точкой, лежащей в плоскости квадрата и удаленной от положительных зарядов на расстояние $2a = 0{,}1$ м, при различных комбинациях зарядов.

13.18. Заряд $Q = 10^{-7}$ Кл расположен в вершине прямого угла. Определите работу, которую необходимо совершить для перемещения заряда $q = 8\cdot10^{-8}$ Кл из точки A, расположенной на одном из лучей на расстоянии $r_1 = 0{,}2$ м от вершины, в точку B, лежащую на другом луче на расстоянии $r_2 = 0{,}1$ м от вершины.

13.19. Определите разность потенциалов электрического поля, создаваемого заряженным шаром радиуса $R = 0{,}01$ м, между точкой, лежащей на поверхности шара, и точкой, удаленной от поверхности на расстояние $a = 0{,}09$ м. Задачу решите при следующих условиях: а) задана поверхностная плотность заряда на шаре $\sigma = 10^{-7}$ Кл/м^2; б) задан потенциал шара $\varphi_0 = 300$ В.

13.20. Для переноса точечного заряда $q = 6\cdot10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $l = 0{,}1$ м от поверхности металлического шара, требуется совершить работу $A = 2\cdot10^{-6}$ Дж. Потенциал шара равен $\varphi_0 = 200$ В. Определите радиус шара.

13.21. Определите работу, совершаемую силами электрического поля по перемещению точечного заряда $q = -2\cdot10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $l = 0{,}01$ м от поверхности шара радиусом $R = 0{,}01$ м, заряженного с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2.

13.22. Два шарика с зарядами $q_1 = 7\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2 = 4\cdot10^{-8}$ Кл, которые можно считать точечными, находятся на расстоянии $r_1 = 0{,}04$ м друг от друга. Найдите работу по сближению зарядов до расстояния $r_2 = 0{,}01$ м.

13.23. Точечные заряды $q_A = 5\cdot10^{-6}$ Кл, $q_B = 2\cdot10^{-6}$ Кл расположены в соседних вершинах прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a = 0{,}8$ м и $BC = b = 0{,}4$ м (рис. 13.5). Определите работу внешних сил по перемещению точечного заряда $Q = 3\cdot10^{-7}$ Кл из точки C в точку D.

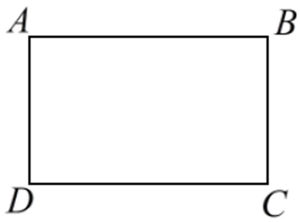

Рис. 13.5. К задачам 13.23 и 13.24

13.24. Точечные заряды $q_A = 5\cdot10^{-6}$ Кл, $q_B = 2\cdot10^{-6}$ Кл расположены в противоположных вершинах прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 0{,}8$ м и $BC = 0{,}4$ м (рис. 13.5). Определите работу внешних сил по перемещению точечного заряда $Q = 3\cdot10^{-7}$ Кл из точки B в точку D.

13.25. Шарик радиуса $R = 0{,}02$ м имеет заряд $q = 4\cdot10^{-12}$ Кл. С какой скоростью подлетает к нему электрон, начавший движение из бесконечно удаленной от шарика точки?

13.26. Шарик массой $m = 10^{-3}$ кг и зарядом $q = 10^{-8}$ Кл перемещается из точки A, потенциал которой равен $\varphi_A = 600$ В, в точку B, потенциал которой равен нулю. Чему была равна его скорость в точке A, если в точке B она стала равной $\upsilon_B = 0{,}2$ м/с?

13.27. Шарик массой $m = 4\cdot10^{-5}$ кг, заряженный положительным зарядом $q = 10^{-9}$ Кл, движется со скоростью $\upsilon = 0{,}1$ м/с. На какое расстояние может приблизиться шарик к положительному точечному заряду $Q = 2\cdot10^{-9}$ Кл?

13.28. Рассчитайте потенциальную энергию W системы четырех точечных зарядов величины $q = 10^{-8}$ Кл, расположенных в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см, в случаях: а) все заряды положительные; б) один из зарядов отрицательный.

13.29. Найдите потенциальную энергию W системы трех точечных зарядов $q_1 = 10^{-8}$ Кл, $q_2 = 2\cdot10^{-8}$ Кл и $q_3 = -3\cdot10^{-8}$ Кл, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см.

13.30. Определите потенциальную энергию W системы четырех точечных зарядов $q_1 = q_2 = 10^{-8}$ Кл, $q_3 = q_4 = -10^{-8}$ Кл, расположенных в вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}1$ м при различных комбинациях зарядов.

13.31. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид: $\varphi = -\dfrac{ax^2}{2} + by^2 - cz^2$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.32. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = ax - by^2 - \dfrac{cz^2}{2}$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.33. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = -ax - \dfrac{by^2}{2} + cz^2$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.34. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = -\dfrac{ax^2}{2} + by^2 - \dfrac{cz^2}{2}$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.35. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = \dfrac{ax^2}{2} - by - cz$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.36. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = -\frac{ax^2}{2} - \frac{by^2}{2} - 2cz^2$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.37. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = -ax - by - cz$, где a, b и c – константы. Найдите напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$.

13.38. Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, имеет вид $\varphi = -ax - by + cz$. Рассчитав величину напряженности поля в произвольной точке, докажите, что такое поле является однородным.

13.39. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x, y, z) = ax\vec{i} - 2by\vec{j} + 2cz\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x, y, z)$.

13.40. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x, y, z) = -a\vec{i} + 2by\vec{j} + 2cz\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x, y, z)$.

13.41. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x, y, z) = a\vec{i} - 2by\vec{j} - 2cz\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x, y, z)$.

13.42. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x, y, z) = ax\vec{i} - 2by\vec{j} + cz\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x, y, z)$.

13.43. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x, y, z) = -ax\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x, y, z)$.

13.44. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x,y,z) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x,y,z)$.

13.45. Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(x,y,z) = ax\vec{i} + by\vec{j} + 4cz\vec{k},$$

где a, b и c – константы. Определите потенциал поля $\varphi(x,y,z)$.

13.46. Электрическое поле создано диполем, имеющим электрический дипольный момент $p = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Кл·м. Найдите разность потенциалов между точками, лежащими вне диполя на его оси и находящимися от зарядов на расстояниях, равных длине диполя $l = 1$ см.

13.47. Точечный заряд $q_0 = -2 \cdot 10^{-10}$ Кл расположен на продолжении оси диполя на расстоянии $r = 10$ см от его центра со стороны положительного заряда. Электрический момент диполя $p = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Кл·м, плечо диполя $l << r$. Найдите работу по перемещению этого заряда в симметрично расположенную точку по другую сторону диполя.

13.48. Тонкий стержень длины $l = 0{,}1$ м равномерно заряжен зарядом $q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найдите разность потенциалов между точками, лежащими на продолжении оси стержня на расстояниях $r_1 = 0{,}2$ м и $r_2 = 0{,}3$ м от конца стержня.

13.49. Тонкий стержень длины $l = 0{,}2$ м равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10^{-8}$ Кл/м. В точку, находящуюся на продолжении оси стержня на расстоянии $a = 0{,}1$ м от его конца, помещен положительный заряд $q = 10^{-9}$ Кл. Найдите работу сил электрического поля по переносу этого заряда в бесконечно удаленную точку.

13.50. Бесконечно длинная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по ее длине заряд с линейной плотностью $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Определите разность потенциалов между точками, удаленными от нити на расстояния $r_1 = 2$ см и $r_2 = 5$ см.

13.51. В центре металлической сферы радиусом $R = 1$ м, несущей положительный заряд $q_1 = 10^{-8}$ Кл, находится маленький шарик с отрицательным зарядом $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найдите потенциал электрического поля в точках, расположенных на расстоянии $r_1 = 0{,}5R$ и $r_2 = 10R$ от центра сферы.

13.52. Две концентрические металлические сферы с радиусами $R_1 = 3$ см и $R_2 = 6$ см несут заряды $q_1 = -10^{-9}$ Кл (внутренняя сфера) и $q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл (внешняя сфера). Найдите потенциал электрического поля в точках, расположенных на расстояниях: а) $r_1 = 1$ см; б) $r_2 = 5$ см; в) $r_3 = 9$ см от центра сфер.

13.53. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}2$ м с равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Найдите разность потенциалов между точками, находящимися на расстояниях $r_1 = 0{,}1$ м и $r_2 = 0{,}2$ м от стержня против его середины.

13.54. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}16$ м равномерно заряжен зарядом $q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найдите работу, совершаемую силами электрического поля, по перемещению отрицательного заряда $Q = -10^{-9}$ Кл из бесконечно удаленной точки в точку, расположенную на расстоянии $r = 0{,}2$ м от стержня напротив его середины.

13.55. В вакууме имеется скопление зарядов в форме шарового слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны $R_1 = 3$ см и $R_2 = 6$ см. Объемная плотность зарядов постоянна и равна $\rho = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^3. Найдите разность потенциалов между точками, лежащими на внутренней и внешней поверхностях шарового слоя.

13.56. В вакууме имеется скопление зарядов в форме длинного цилиндра, внутренний и внешний радиусы которого равны $R_1 = 2$ см и $R_2 = 4$ см. Объемная плотность зарядов постоянна и равна $\rho = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^3. Найдите разность потенциалов электрического поля между точками, лежащими на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

13.57. Тонкий стержень, согнутый в полукольцо, заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10^{-7}$ Кл/м. Определите работу сил электрического поля по перемещению заряда $q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл из центра полукольца в бесконечно удаленную точку.

13.58. Тонкое кольцо радиуса $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $q = 10^{-7}$ Кл. Определите разность потенциалов между точками, расположенными на оси кольца на расстояниях $l_1 = 10$ см и $l_2 = 20$ см от его середины.

13.59. Тонкий стержень, согнутый в кольцо радиуса $R = 0{,}1$ м, заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q = -5 \cdot 10^{-9}$ Кл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии $l = 0{,}2$ м от его центра?

13.60. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Какую скорость получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния $r_1 = 1$ см до расстояния $r_2 = 0{,}5$ см?

Практическое занятие № 14

ДИЭЛЕКТРИКИ И ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Цель занятия

Знакомство с процессами, происходящими при внесении диэлектриков и проводников в электрическое поле, и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Внесение диэлектриков, т. е. веществ, не способных проводить электрический ток, во внешнее электрическое поле приводит к поляризации диэлектрика – возникновению отличного от нуля результирующего электрического дипольного момента диэлектрика. При поляризации диэлектрика происходит процесс ориентации дипольных моментов молекул или появление под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю молекулярных диполей. Этот процесс сопровождается возникновением связанных зарядов на поверхности диэлектрика, ослабляющих электрическое поле внутри диэлектрика в ε раз: $E = E_0/\varepsilon$. Здесь ε – характеризующая свойства диэлектрика безразмерная относительная диэлектрическая проницаемость образца.

Поляризованность образца объемом V определяется как

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i / V,$$

где $\vec{p}_i$ – дипольный момент i-й молекулы. Поляризованность диэлектрика пропорциональна напряженности электростатического поля:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

где безразмерный коэффициент пропорциональности χ называется диэлектрической восприимчивостью, которая связана с диэлектрической проницаемостью ε соотношением

$$\varepsilon = 1 + \chi .$$

За счет поляризации и возникновения поля связанных зарядов напряженность E_0 внешнего поля уменьшается до величины E, причем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\vec{E}}{\varepsilon}.$$

Для расчета электрических полей внутри диэлектрика, кроме напряженности поля $\vec{E}$, вводится вспомогательная величина $\vec{D}$, называемая вектором электрического смещения (вектором электрической индукции):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике наиболее просто записывается именно для вектора электрического смещения:

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i ,$$

так как в этом случае поток Φ_D определяется только сторонними зарядами q_i (зарядами, находящимися вне диэлектрика). Заряды внутри диэлектрика здесь не учитываются.

В проводниках носители заряда способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому при равновесии зарядов в проводнике напряженность поля всюду внутри него должна быть равна нулю $\left(\vec{E} = 0\right)$, потенциал – постоянен ($\varphi = \text{const}$). Поверхность проводника в электростатическом поле является эквипотенциальной.

Вблизи поверхности проводника напряженность поля E и индукция D, определяемые поверхностной плотностью заряда $\sigma = \Delta q / \Delta S$, связаны между собой соотношениями $E = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon$ и $D = \sigma$ и должны быть в каждой точке направлены по нормали к поверхности.

В качестве величины, характеризующей способность проводника накапливать электрический заряд, вводится понятие электроемкости. Электроемкости уединенного проводника (с потенциалом φ) и конденсатора (с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ между обкладками), обладающих зарядом q, определяются следующим образом:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{U}.$$

В частности, емкость шара радиуса R и плоского конденсатора, имеющего пластины площадью S, расположенные на расстоянии d, можно рассчитать по формулам:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R, \quad C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещен шар или которая находится внутри обкладок конденсатора.

Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}.$$

Энергия электростатического поля

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{ED}{2} V$$

сосредоточена в электрическом поле этих тел и распределена по всему пространству, где есть поле. Энергия, сосредоточенная в единице объема этого поля, – объемная плотность энергии электростатического поля, находится как

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 14-1. Частица с зарядом $q = 10^{-8}$ Кл влетает в область с однородным электрическим полем напряженности $E = 10^6$ В/м, создаваемым в конденсаторе с длиной обкладок $b = 0{,}1$ м (рис. 14.1), под углом $\alpha = 35°$ к линиям напряженности, а вылетает под углом $\beta = 60°$. Траектория частицы лежит в плоскости чертежа. Определите первоначальную кинетическую энергию частицы. Силой тяжести пренебречь.

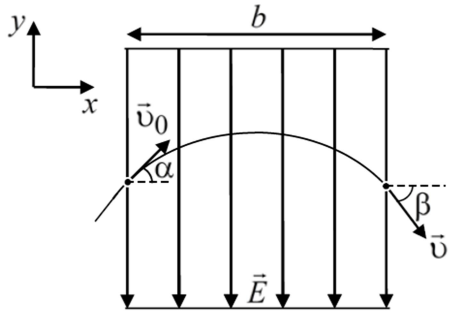

Рис. 14.1. К задаче 14-1

Р е ш е н и е. Вне конденсатора, где отсутствует сила взаимодействия заряда с электрическим полем, частица летит прямолинейно и равномерно, поскольку сила тяжести в данной задаче не учитывается. Искривление траектории внутри конденсатора происходит под действием силы

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

направленной вертикально вниз. Эта сила сообщает частице ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m},$$

меняющее вертикальную составляющую вектора скорости.

Введем координатные оси: горизонтальную ось x и вертикальную ось y (рис. 14.1). Согласно принципу независимости движений, результирующее движение рассматриваемой частицы представляет собой суперпозицию равномерного движения вдоль оси x и равнопеременного – вдоль оси y. Заметим, что при движении тел в поле силы тяжести наблюдается аналогичная картина.

Итак, для проекций скорости на оси x и y справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon\cos\beta = \upsilon_0\cos\alpha; \\ \upsilon_y = -\upsilon\sin\beta = \upsilon_0\sin\alpha - at. \end{cases}$$

Ускорение $a = qE/m$ действует только во время пролета t сквозь конденсатор, который происходит со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0\cos\alpha$, поэтому

$$t = b/\upsilon_0\cos\alpha.$$

С учетом вышесказанного, уравнения для скорости запишем в виде:

$$\begin{cases} \upsilon\cos\beta = \upsilon_0\cos\alpha; \\ -\upsilon\sin\beta = \upsilon_0\sin\alpha - \dfrac{qEb}{m\upsilon_0\cos\alpha}. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, будем иметь

$$-\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \frac{qEb}{m\upsilon_0^2\cos^2\alpha}.$$

Тогда первоначальная кинетическая энергия частицы

$$T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{qEb}{2\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}.$$

После подстановки соотвтетствующих числовых значений, получим

$$T = 3{,}66\cdot10^{-4} \text{ Дж.}$$

Задача 14-2. Три металлических шара с радиусами $R_1 = 1$ см, $R_2 = 1{,}5$ см, $R_3 = 1{,}2$ см, заряженные, соответственно, до поверхностной плотности $\sigma_1 = 10^{-5}$ Кл/м^2, $\sigma_2 = 2\cdot10^{-5}$ Кл/м^2, $\sigma_3 = 1{,}3\cdot10^{-5}$ Кл/м^2, соединили между собой. Найдите заряды шаров до и после соединения, а также поверхностные плотности зарядов на шарах после соединения.

Р е ш е н и е. До соединения заряды шаров могут быть рассчитаны по формулам:

$$q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1 = 12,56 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2 = 56,52 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_3 = 4\pi R_3^2 \sigma_3 = 23,51 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

После соединения заряды шаров меняются до тех пор, пока потенциалы всех точек на их поверхности шаров не выровняются, достигнув некоторого общего значения φ_0. Потенциал φ_0 связан с зарядами шаров после соединения q_1', q_2', q_3' соотношениями:

$$q_1' = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \varphi_0,\ q_2' = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \varphi_0,\ q_3' = 4\pi\varepsilon_0 R_3 \varphi_0.$$

В силу закона сохранения заряда, суммарный заряд системы не меняется:

$$q_1 + q_2 + q_3 = q_1' + q_2' + q_3'.$$

С учетом приведенных выше соотношений придем к формуле

$$4\pi(R_1^2\sigma_1 + R_2^2\sigma_2 + R_3^2\sigma_3) = 4\pi\varepsilon_0\varphi_0(R_1 + R_2 + R_3),$$

позволяющей рассчитать потенциал φ_0 шаров после соединения:

$$\varphi_0 = \frac{R_1^2\sigma_1 + R_2^2\sigma_2 + R_3^2\sigma_3}{\varepsilon_0(R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2 + R_3)}.$$

Заряды шаров после соединения:

$$q_1' = \frac{R_1(q_1 + q_2 + q_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 25,02 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_2' = \frac{R_2(q_1 + q_2 + q_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 37,54 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_3' = \frac{R_3(q_1 + q_2 + q_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 30{,}03 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Поверхностные плотности зарядов на шарах после соединения соответственно равны:

$$\sigma_1' = q_1' \big/ 4\pi R_1^2 = 1{,}99 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2;$$

$$\sigma_2' = q_2' \big/ 4\pi R_2^2 = 1{,}33 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2;$$

$$\sigma_3' = q_3' \big/ 4\pi R_3^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2.$$

Задача 14-3. Во сколько раз изменится потенциал заряженного проводящего шара радиусом R_1 = 5 см, если окружить его шаровым слоем диэлектрика с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 = 10 см с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

Р е ш е н и е. В отсутствие диэлектрического слоя потенциал шара

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R_1},$$

где q – его заряд. При наличии диэлектрика электрическое поле на расстояниях $r > R_2$ остается неизменным, поэтому потенциал внешней поверхности диэлектрического слоя (при $r = R_2$) равен

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R_2}.$$

Потенциал φ_1 проводящего шара отличается от потенциала φ_2 на расстоянии R_2 на разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между внутренней и внешней поверхностями диэлектрического слоя. Электрическое поле в диэлектрике в ε раз меньше электрического поля в той же точке в отсутствие диэлектрика. Таким образом, при $R_1 \le r \le R_2$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2}.$$

Для определения $\Delta\varphi_{12}$ предположим, что диэлектриком заполнено все пространство вокруг шара. Тогда полученная выше формула была бы справедливой при любых значениях $r \geq R_1$, а потенциал такого электрического поля при $r \geq R_1$ выражался бы формулой

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

Отсюда следует, что искомая разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между внутренней и внешней поверхностями диэлектрического слоя ссотавит

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Поскольку потенциал φ_1 проводящего шара будет равен

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \Delta\varphi_{12} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right],$$

окончательно получим, что

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]R_1 = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2 - R_1}{\varepsilon R_2} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Задача 14-4. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и заряжены до общей разности потенциалов $U = 250$ В, после чего отключены от источника. Расстояние между обкладками конденсаторов равно $d = 0,01$ м. Затем пространство между пластинами одного из конденсаторов заполняют диэлектриком ($\varepsilon = 5$). Определите напряженность электростатического поля в этом конденсаторе и разность потенциалов на его обкладках.

Решение. На обкладках конденсаторов, соединенных последовательно и подключенных к источнику разности потенциалов (рис. 14.2, *а*), находятся одинаковые по модулю заряды Q. При этом разности потенциалов между обкладками каждого конденсатора равны ($U_1 = U_2$) и связаны с зарядом Q и емкостью C конденсаторов соотношением

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C},$$

из которого следует, что $Q = CU/2$.

а *б*

Рис. 14-2. К задаче 14-4: *а* – источник подключен; *б* – истоничк отключен

После отключения от источника (рис. 14.2, *б*) заряд обкладок конденсатора измениться не может. Заполнение конденсатора диэлектриком увеличивает его емкость в ε раз. Следовательно, напряжение U_1' после заполнения конденсатора диэлектриком вычислим по формуле

$$U_1' = \frac{Q}{\varepsilon C} = \frac{CU}{2\varepsilon C} = \frac{U}{2\varepsilon} = 25 \text{ В.}$$

Напряженность электростатического поля внутри конденсатора определяется разностью потенциалов на обкладках конденсатора U_1' и расстоянием между ними:

$$E = \frac{U'}{d} = \frac{U}{2\varepsilon d} = 2500 \text{ В/м.}$$

Задача 14-5. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см^2, расстояние между ними $d = 2$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 250$ В. В пространство между обкладками вводится стеклянная пластинка (ε = 6) той же толщины $d = 2$ мм. Заполнение конденсатора стеклом происходит: 1) после его отключения от источника напряжения; 2) при включенном источнике напряжения. Для каждого из этих случаев найдите: а) емкость конденсатора, разность потенциалов между пластинами и их заряд, поверхностную плотность свободных зарядов на пластинах, напряженность электрического поля внутри конденсатора до и после заполнения; б) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле после заполнения, энергию конденсатора; в) работу, совершаемую силами электрического поля по втягиванию стеклянной пластины внутрь конденсатора.

Решение. Емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$ не зависит от условий заполнения диэлектриком, так как определятся только геометрическими размерами (S, d) и свойствами диэлектрика (ε). В частности, емкость рассматриваемого конденсатора до и после заполнения диэлектриком равна:

$$C_1 = \varepsilon_0 S/d = 44{,}3 \text{ пФ}, \quad C_2 = \varepsilon C_1 = 266 \text{ пФ}.$$

1. При заполнении конденсатора диэлектриком после отключения от источника напряжения заряд пластин измениться не может:

$$Q = \text{const} \text{ или } Q_1 = Q_2.$$

Численное значение заряда пластин рассматриваемого конденсатора найдем из соотношения

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = 1{,}11 \cdot 10^{-8} \text{ Кл},$$

которое позволяет рассчитать и разность потенциалов, установившуюся между пластинами после заполнения конденсатора диэлектриком:

$$U_2 = C_1 U_1 / C_2 = U_1/\varepsilon = 41{,}7 \text{ В}.$$

Учтем, что $U_1 = U = 250$ В.

Поверхностная плотность свободных зарядов на пластинах после заполнения в условиях $Q = \text{const}$ измениться не может, поэтому

$$\sigma_1 = \sigma_2 = Q/S = 1{,}11 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Линии напряженности электрического поля внутри конденсатора в отсутствие диэлектрика (рис. 14.3, *а*) направлены от пластин с положительным зарядом к пластине с отрицательным зарядом. Величина напряженности электрического поля в этом случае определяется поверхностной плотностью свободных зарядов на пластинах конденсатора:

$$E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0 = 1{,}25 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

а *б*

Рис. 14.3. К задаче 14-5: *а* – диэлектрик отсутствует; *б* – диэлетрик присутствует

Поскольку поле внутри конденсатора однородно, для нахождения напряженности используем соотношение

$$E_1 = U_1/d\,.$$

При внесении диэлектрической стеклянной пластины (рис. 14.3, *б*) в электрическом поле конденсатора диэлектрик поляризуется, в результате чего на его поверхности появляются связанные заряды противоположного знака, поверхностную плотность которых обозначим, как σ_2'. Поле связанных зарядов направлено противоположно полю конденсатора. Результирующее поле при наличии диэлектрика определяется как свободными, так и связанными зарядами:

$$E_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_2'}{\varepsilon_0}\,.$$

При этом напряженность электрического поля уменьшается в ε раз:

$$E_2 = U_2/d = U_1/\varepsilon d = E_1/\varepsilon = 0{,}21 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

С учетом того, что

$$E_2 = E_1/\varepsilon = \sigma_1/\varepsilon_0\varepsilon = \sigma_2/\varepsilon_0\varepsilon\,,$$

для нахождения поверхностной плотности связанных зарядов σ_2' запишем соотношение

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_2'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

из которого следует, что

$$\sigma_2' = \sigma_2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\sigma_2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = \frac{\sigma_1(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = 0,925 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Энергию конденсатора до и после заполнения найдем по формулам:

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = 2,77 \cdot 10^{-6} \text{ Дж},$$

$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2\varepsilon} = \frac{W_1}{\varepsilon} = 0,46 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Видно, что энергия конденсатора уменьшилась, поскольку часть первоначальной энергии была израсходована на совершение силами электрического поля работы по втягиванию диэлектрика внутрь конденсатора.

Итак, в данном случае искомая работа

$$A = W_1 - W_2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} W_1 = 2,31 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

2. Так как источник разности потенциалов остается подключенным к конденсатору, заряды пластин могут меняться, а заполнение конденсатора диэлектриком происходит в условиях $Q = \text{const}$.

Соответственно разность потенциалов между пластинами рассматриваемого конденсатора остается неизменной:

$$U_1 = U_2 = 250 \text{ В},$$

а заряды на пластинах найдем из соотношений:

$$Q_1 = C_1 U_1 = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ Кл},$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = \varepsilon Q_1 = 6,64 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Видим, что заряд Q_2 после заполнения конденсатора диэлектриком увеличился в ε раз.

Поверхностная плотность свободных зарядов на пластинах диэлектрика до и после заполнения также отличается в ε раз:

$$\sigma_1 = Q_1/S = \varepsilon_0 U/d = 1{,}11 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon U/d = 6{,}64 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Величина напряженности электрического поля внутри плоского конденсатора в условиях $U = \text{const}$ не зависит от наличия диэлектрика:

$$E_1 = E_2 = U/d = 1{,}25 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Внесение диэлектрика приводит к появлению на его поверхности связанных зарядов противоположного знака, уменьшающих поле внутри конденсатора. Благодаря источнику напряжения за счет увеличения свободных зарядов на пластинах в ε раз происходит компенсация этого ослабления.

Напряженности электрического поля до и после заполнения:

$$E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0 = \sigma_2/\varepsilon_0\varepsilon \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_2'}{\varepsilon_0}$$

равны между собой. Отсюда для поверхностной плотности связанных зарядов σ_2' на поверхности диэлектрика запишем

$$\sigma_2' = \sigma_2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \sigma_1(\varepsilon - 1) = 5{,}55 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Энергия конденсатора до и после заполнения может быть найдена по формулам:

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = 2{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ Дж},$$

$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \varepsilon W_1 = 16{,}62 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Видно, что энергия конденсатора так же, как и заряд на его пластинах, увеличилась в ε раз.

Увеличение энергии конденсатора и совершение работы силами электрического поля по втягиванию диэлектрической пластины внутрь него в данном случае происходит за счет энергии внешнего источника напряжения.

Поскольку при заполнении конденсатора диэлектриком на его обкладки дополнительно перейдут от источника напряжения заряды:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \varepsilon Q_1 - Q_1 = (\varepsilon - 1)Q_1,$$

а сам источник совершит работу

$$A_{\text{ист}} = \Delta Q U = (\varepsilon - 1)Q_1 U = 2(\varepsilon - 1)W_1.$$

Эта работа в силу закона сохранения энергии идет на увеличение энергии конденсатора и совершение полем работы по втягиванию диэлектрика:

$$A_{\text{ист}} = W_2 - W_1 + A.$$

Следовательно, искомую работу найдем как

$$A = A_{\text{ист}} - W_2 + W_1 = 2(\varepsilon - 1)W_1 - \varepsilon W_1 + W_1 = (\varepsilon - 1)W_1.$$

Из этой формулы следует:

$$A = W_2 - W_1 = (\varepsilon - 1)W_1 = 13{,}85 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Работа, совершаемая полем в этом случае ($U = \text{const}$), также в ε раз больше аналогичной работы для случая $Q = \text{const}$. Это объясняется тем, что по мере заполнения диэлектриком в первом случае напряженность электрического поля внутри него уменьшается (тоже в ε раз).

Задача 14-6. Емкость системы конденсаторов (рис. 14.7) не меняется при замыкании ключа *K*. Определите величину емкости C_x, если $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 =$ 2 мкФ.

Решение. Для удобства расчетов обозначим емкость конденсаторов $C_1 = C$ и $C_2 = 2C$.

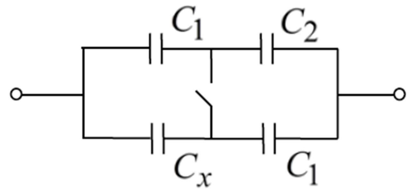

Рис. 14.4. К задаче 14-6

При разомкнутом ключе K схема делится на верхнюю и нижнюю части. При этом конденсаторы C_1 и C_2, а также C_x и C_1 соединены между собой последовательно, образуя участки емкостью $2C/3$ и $CC_x/(C+C_x)$ соответственно. Эти участки соединены между собой параллельно, а значит общая емкость цепи в этом случае составит

$$C_0 = \frac{2C}{3} + \frac{CC_x}{C+C_x} = \frac{(2C+5C_x)C}{3(C+C_x)}.$$

При замкнутом ключе K схема делится на правую и левую части. При этом конденсаторы C_1 и C_x, а также C_1 и C_2 соединены между собой параллельно, образуя участки емкостью $C + C_x$ и $3C$ соответственно. Эти участки соединены между собой последовательно, а значит, общую емкость в этом случае рассчитаем по формуле

$$C_0 = \frac{3C(C+C_x)}{4C+C_x}.$$

Приравняв емкости, рассчитанные для обоих случаев, для нахождения емкости C_x получим квадратное уравнение:

$$4C_x^2 - 4C_xC + C^2 = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$(2C_x - C)^2 = 0.$$

Следовательно, величина искомой емкости

$$C_x = C/2 = 0{,}5 \text{ мкФ}.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

14.1. Какие вещества называются диэлектриками? Какие существуют группы диэлектриков?

14.2. Что такое поляризация диэлектрика? Какие процессы происходят при различных видах поляризации?

14.3. Чем определяется результирующее поле, действующее на молекулы диэлектрика? Почему внутри диэлектрика электрическое поле уменьшается?

14.4. Что такое поляризованность диэлектрика, и от чего она зависит?

14.5. Что характеризует относительная диэлектрическая проницаемость среды? Как она связана с диэлектрической восприимчивостью?

14.6. Как определяется вектор электрического смещения, и что он характеризует?

14.7. Как записывается теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике?

14.8. Как преломляются линии электрического поля на границе раздела двух диэлектрических сред?

14.9. Что такое сегнетоэлектрики? Какими свойствами они обладают?

14.10. Как свойства сегнетоэлектриков связаны с их структурой?

14.11. Какие вещества являются проводниками? Что нужно для равновесия зарядов в проводнике?

14.12. Какие процессы происходят при внесении проводников в электрическое поле?

14.13. Как находится электроемкость уединенного проводника, и что она характеризует?

14.14. Что такое конденсаторы? Как находится емкость плоского конденсатора, и от чего она зависит?

14.15. Как находится энергия заряженного проводника и конденсатора? Где сосредоточена энергия заряженных тел? Чему равна объемная плотность энергии электростатического поля?

14.16. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе капелька ртути с зарядом $q = 10^{-16}$ Кл находится в равновесии при напряженности электрического поля $E = 6 \cdot 10^4$ В/м. Найдите радиус капли.

14.17. Пылинка с зарядом $q = 2 \cdot 10^{-12}$ Кл находится в равновесии в поле горизонтального плоского конденсатора. Найдите разность потенциалов между пластинами конденсатора, если масса пылинки равна $m = 10^{8}$ кг, а расстояние между пластинами конденсатора $d = 0{,}05$ м.

14.18. Шар диаметром $d = 0{,}01$ м, сделанный из меди с плотностью $p_1 = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, помещен в масло с плотностью $p_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Чему равен заряд шара, если внутри конденсатора в однородном электрическом поле напряженностью $E = 3{,}6 \cdot 10^6$ В/м шар находится в равновесии в масле? Как направлено электрическое поле?

14.19. Между двумя вертикальными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, на нити висит заряженный шарик массой $m = 0{,}1$ г. После подачи на пластины разности потенциалов $U = 1$ кВ нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 10°$. Найдите заряд q шарика.

14.20. Пылинка массой $m = 10^{-10}$ кг взвешена в плоском горизонтальном конденсаторе с воздушным зарядом $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м при разности потенциалов между пластинами $U = 124$ В. Под действием ультрафиолетовых лучей пылинка частично теряет заряд, и для восстановления ее равновесия необходимо увеличить разность потенциалов между пластинами на $\Delta U = 8$ В. Какой заряд потеряла пылинка?

14.21. Протон летит от одной пластины плоского конденсатора до другой. Разность потенциалов между пластинами $U = 3 \cdot 10^3$ В, расстояние между ними $d = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Найдите: а) силу, действующую на электрон; б) ускорение электрона; в) скорость, с которой электрон подлетает ко второй пластине; г) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора.

14.22. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $\upsilon = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Найдите: а) разность потенциалов между пластинами; б) напряженность электрического поля внутри конденсатора; в) поверхностную плотность заряда на пластинах.

14.23. В плоском конденсаторе, помещенном в вакууме, взвешена капелька ртути. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, приложенная разность потенциалов $U_1 = 1000$ В. Внезапно разность потенциалов падает до $U_2 = 995$ В. Когда капелька достигнет нижней пластины, если она первоначально находилась посередине конденсатора?

14.24. В плоском конденсаторе к пластинам, находящимся на расстоянии $d = 2$ см, приложена разность потенциалов $U = 220$ В. Какую скорость получит электрон под действием электрического поля, пройдя по силовой линии расстояние $l = 3$ мм?

14.25. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 4$ см. Электрон начинает двигаться от отрицательной пластины в тот момент, когда от положительной пластины начинает двигаться протон. На каком расстоянии от положительной пластины они встретятся?

14.26. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $\upsilon = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 10^4$ В/м, его длина $l = 0{,}05$ м. Определите величину и направление скорости электрона при вылете его из конденсатора. На сколько сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе?

14.27. Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно пластинам, заряженным с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-7}$ Кл/м^2, на равном расстоянии от них. Расстояние между пластинами $d = 0{,}02$ м, длина конденсатора $l = 0{,}1$ м. Какова должна быть предельная начальная скорость υ_0 электрона, чтобы он не вылетел из конденсатора?

14.28. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 60$ В, влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Напряженность электрического поля в конденсаторе $E = 100$ В/м, расстояние между его пластинами $d = 0{,}04$ м. Через сколько времени после того, как электрон влетел в конденсатор, он попадает на одну из пластин?

14.29. Протон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $\upsilon = 1{,}2\cdot10^5$м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $E = 3000$ В/м, длина его пластин $l = 0{,}1$ м. Во сколько раз скорость протона при вылете из конденсатора будет больше его начальной скорости?

14.30. Протон и α-частица влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α-частицы, если: 1) частицы двигались с одинаковой скоростью; 2) частицы были ускорены одинаковой разностью потенциалов?

14.31. Шарик радиусом $R = 1$ см заряжается отрицательно до потенциала $\varphi = 300$ В. Найдите массу всех электронов, составляющих заряд, сообщенный шарику при зарядке и энергию заряженного шарика.

14.32. Восемь заряженных водяных капель радиусом $r = 1$ мм и зарядом $q = 10^{-10}$ Кл каждая сливаются в одну общую водяную каплю. Найдите потенциал и энергию большой капли.

14.33. Шар, погруженный в керосин ($\varepsilon = 2$), имеет потенциал $\varphi = 4500$ В и поверхностную плотностью заряда $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2. Найдите радиус, заряд, емкость и энергию шара.

14.34. Два проводящих шара с радиусами $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см расположены на большом расстоянии друг от друга. На первом шаре помещен заряд $Q_0 = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл, второй шар не заряжен. После соединения шаров проволочкой этот заряд перераспределится между обоими проводящими шарами. Найдите: а) потенциал первого шара до соединения; б) заряды и потенциалы шаров после их соединения; в) энергию шаров до и после соединения; г) работу разряда.

14.35. Заряженный шар радиуса $R_1 = 2$ см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром радиуса $R_2 = 3$ см. После того как шары разъединили, энергия шара *B* оказалась равной $W_2 = 0{,}4$ Дж. Определите заряд и потенциал первого шара до их соприкосновения.

14.36. Шару емкостью $C_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-12}$ Ф сообщили заряд $q = 1{,}8 \cdot 10^{-9}$ Кл. Какое количество электричества перейдет на изначально незаряженный шарик, имеющий радиус $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, если его соединить проводником с первым шаром?

14.37. Два металлических шара (первый радиусом $R_1 = 3$ см с зарядом $q_1 = 10^{-8}$ Кл и второй радиусом $R_2 = 2$ см и потенциалом $\varphi_2 = 6000$ В) соединены проволокой, емкостью которой можете пренебречь. Найдите: а) потенциал и энергию первого шарика до разряда; б) заряд и энергию второго шарика до разряда; в) заряд и потенциал первого шарика после разряда; г) заряд и потенциал второго шарика после разряда; е) энергию соединенных проводником шариков; ж) работу разряда.

14.38. Металлический шар *A* радиусом $R = 5$ см, заряженный до потенциала $\varphi = 800$ В, после отключения от источника напряжения соединяется проволочкой сначала с таким же незаряженным шаром *B*, а затем (после отсоединения от шара *B*) с таким же незаряженным шаром *C*. Найдите: а) первоначальную энергию шара *A*; б) энергию шаров *A* и *B* после соединения и работу разряда при соединении; в) энергию шаров *A* и *C* после соединения и работу разряда при соединении.

14.39. В пространство между обкладками незаряженного плоского конденсатора вносят металлическую пластину, имеющую заряд $Q = 10^{-9}$ Кл, так, что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры $l_1 = 4$ мм и $l_2 = 2$ мм (рис. 14.5). Площади пластины и обкладок конденсатора одинаковы и равны $S = 25$ см^2. Определите разность потенциалов между обкладками конденсатора.

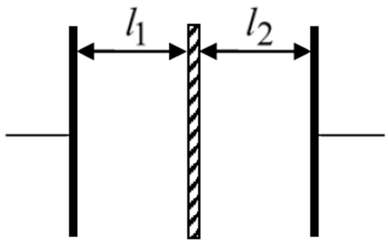

Рис. 14.5. К задаче 14.39

14.40. Трем изолированным конденсаторам одинаковой емкости были сообщены заряды Q_1, Q_2, Q_3. Затем конденсаторы соединили разноименно заряженными обкладками (рис. 14.6). Определите новые заряды Q_1', Q_2', Q_3'.

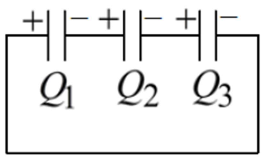

Рис. 14.6. К задаче 14.40

14.41. Конденсаторы емкостью $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ заряжены до разности потенциалов $U_1 = 100$ В и $U_2 = 200$ В, соответственно. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Определите: а) заряды конденсаторов до и после соединения; б) разность потенциалов между обкладками конденсаторов после их соединения; в) количество теплоты, выделившееся в результате их соединения.

14.42. Конденсаторы емкостью $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ заряжены до разности потенциалов $U_1 = 100$ В и $U_2 = 200$ В, соответственно. После зарядки конденсаторы соединили разноименными полюсами. Определите: а) заряды конденсаторов до и после соединения; б) разность потенциалов между обкладками конденсаторов после их соединения; в) количество теплоты, выделившееся в результате их соединения.

14.43. Плоский конденсатор состоит из горизонтально расположенных пластин площадью $S = 0{,}2$ м^2, причем нижняя пластина закреплена неподвижно, а верхняя подвешена на пружине жесткостью $k = 35$ Н/м. Расстояние между пластинами $d = 1$ мм. Когда конденсатор подсоединили невесомыми проводами к батарее, то пружина удлинилась на $\Delta x = 0{,}5$ мм. Определите ЭДС батареи.

14.44. Найдите разность потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов (рис. 14.7), емкости которых $C_1 = 4$ мкФ и $C_2 = 1$ мкФ, если ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 2$ В и $\mathcal{E}_2 = 6$ В.

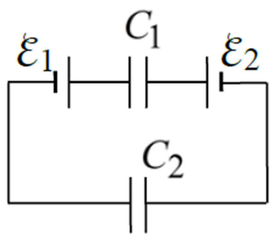

Рис. 14.7. К задаче 14.44

14.45. Найдите разность потенциалов между точками A и B (рис. 14.8). Емкости конденсаторов $C_1 = 4$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 2$ В и $\mathcal{E}_2 = 6$ В.

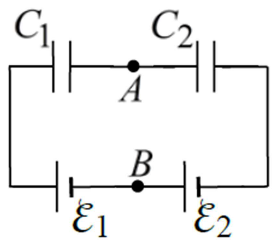

Рис. 14.8. К задаче 14.45

14.46. Плоский конденсатор с двумя слоями диэлектриков, состоящими из фарфора ($\varepsilon = 5$) толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита ($\varepsilon = 3$) толщиной $d_2 = 1{,}5$ мм, подключен к источнику напряжения $U = 250$ В. Определите емкость конденсатора и заряд на его пластинах площадью $S = 10^{-2}$ см^2.

14.47. Электроемкость плоского воздушного конденсатора равна $C = 2$ мкФ, расстояние между его пластинами $d = 4$ мм. Какова будет электроемкость конденсатора, если на нижнюю пластину положить лист эбонита ($\varepsilon = 3$) толщиной $d_1 = 3$ мм?

14.48. В пространстве между пластинами плоского конденсатора с площадью пластин $S = 25$ см^2 и расстоянием между ними $d = 1{,}2$ мм находятся два слоя диэлектриков: слюды ($\varepsilon = 7$) толщиной $d_1 = 0{,}7$ мм и эбонита ($\varepsilon = 7$) толщиной $d_2 = 0{,}3$ мм. Определите электроемкость конденсатора. Как изменится электроемкость конденсатора, если вытащить пластинку эбонита?

14.49. Электроемкость плоского конденсатора равна $C = 1{,}5$ мкФ. Расстояние между его пластинами $d = 5$ мм. Конденсатор подключен к источнику напряжения $U = 200$ В. Какова будет электроемкость конденсатора, если на нижнюю пластину положить стеклянную пластинку ($\varepsilon = 6$) толщиной $d_1 = 3$ мм? Как при этом изменится энергия конденсатора?

14.50. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора $d = 2$ см. Заряд каждой пластины равен $Q = 10^{-8}$ Кл, разность потенциалов между ними $U = 4$ кВ. Рассчитайте: а) емкость конденсатора; б) поверхностную плотность заряда на его пластинах; в) энергию поля конденсатора; г) силу взаимного притяжения его пластин.

14.51. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 5$ мм, разность потенциалов между ними $U = 150$ В. На нижней пластине лежит плитка парафина ($\varepsilon = 2$) толщиной $d_2 = 4$ мм. Определите емкость конденсатора и поверхностную плотность свободных зарядов на пластинах конденсатора и связанных зарядов на парафине.

14.52. Стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$) толщиной $d = 2$ см вдвинули в плоский конденсатор так, что она вплотную прилегает к его обкладкам. Заряд обкладок конденсатора $Q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл, их площадь $S = 10^{-2}$ м^2. Найдите поверхностную плотность свободных зарядов на пластинах конденсатора, плотность связанных зарядов на стеклянной пластине и плотность энергии электрического поля внутри конденсатора.

14.53. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-7}$ Кл/м^2. Расстояние между его пластинами $d_1 = 1$ мм. На сколько изменится разность потенциалов на обкладках конденсатора, если увеличить расстояние между ними до $d_2 = 3$ мм и опустить его в жидкий диэлектрик с $\varepsilon = 2$?

14.54. Воздушный конденсатор емкостью $C = 0{,}2$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_0 = 600$ В. Найдите изменение энергии конденсатора и работу сил электрического поля при заполнении конденсатора жидким диэлектриком ($\varepsilon = 2$) в случае, когда конденсатор отключен от источника.

14.55. Воздушный конденсатор емкостью $C = 0{,}2$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_0 = 600$ В. Найдите изменение энергии конденсатора и работу сил электрического поля при его заполнении жидким диэлектриком ($\varepsilon = 2$) в случае, когда конденсатор подключен к источнику.

14.56. Бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного диэлектрика ($\varepsilon = 2$) помещена в однородное электрическое поле с напряженностью $E_0 = 100$ В/м перпендикулярно силовым линиям. Определите: 1) напряженность электрического поля E и электрическое смещение D внутри пластины; 2) поляризованность диэлектрика P; 3) поверхностную плотность связанных зарядов σ.

14.57. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon = 6$). Расстояние между пластинами $d = 3$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 900$ В. Найдите: а) напряженность электрического поля в стекле; б) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; в) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; г) диэлектрическую восприимчивость стекла.

14.58. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). При подключении конденсатора к источнику напряжения давление на парафин стало равным $p = 5$ Па. Найдите: а) напряженность электрического поля E; б) электрическое смещение D; в) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; г) поверхностную плотность связанных зарядов на парафине; д) диэлектрическую восприимчивость парафина; е) объемную плотность энергии электрического поля в парафине.

14.59. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d = 2$ мм друг от друга, помещен диэлектрик, полностью заполняющий пространство между пластинами. На пластины подана разность потенциалов $U_0 = 600$ В. Отключив источник напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора, при этом разность потенциалов на пластинах конденсатора возросла до $U = 1800$ В. Найдите: а) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; б) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектрике; в) диэлектрическую восприимчивость используемого диэлектрика.

14.60. Найдите объемную плотность энергии электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 2$ см от: а) поверхности шара радиусом $R = 1$ см, заряженного с поверхностной плотностью

$\sigma = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2; б) бесконечно протяженной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2; в) бесконечно длинной нити, заряженной с линейной плотностью заряда $\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 2$.

14.61. Между обкладками плоского воздушного конденсатора (расстояние между обкладками $d_1 = 0{,}01$ мм, площадь обкладок $S = 2 \cdot 10^{-3}$ м^2) вводится параллельно обкладкам конденсатора металлическая пластинка, толщина которой $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м. Определите емкость конденсатора с введенной проводящей пластиной.

14.62. В каких пределах может изменяться емкость системы, состоящей из двух конденсаторов переменной емкости, если емкость каждого из них изменяется от $C_{\min} = 10$ пФ до $C_{\max} = 500$ пФ?

14.63. Два плоских воздушных конденсатора, каждый из которых имеет емкость $C = 10^{-5}$ Ф, соединены в батарею. Как изменится емкость батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить диэлектриком ($\varepsilon = 7$)? Рассмотрите случаи: 1) конденсаторы соединены последовательно; 2) конденсаторы соединены параллельно.

14.64. Конденсатор емкости $C_1 = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 400$ В, соединен в батарею с незаряженным конденсатором емкости $C_2 = 10^{-5}$ Ф. Определите разность потенциалов на полюсах батареи, если конденсаторы соединены параллельно.

14.65. Два одинаковых плоских конденсатора соединены в батарею и заряжены до разности потенциалов $U = 160$ В. Определите разность потенциалов на конденсаторах, если после отключения батареи от источника тока у первого конденсатора уменьшили расстояние между пластинами в два раза. Конденсаторы соединены в батарею: а) последовательно; б) параллельно.

14.66. Определите емкости систем конденсаторов, изображенных на рис. 14.9.

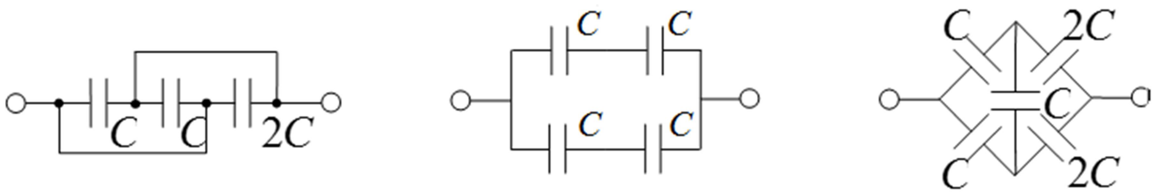

Рис. 14.9. К задаче 14.66

14.67. Найдите емкость изображенной на рис. 14.10 системы одинаковых конденсаторов.

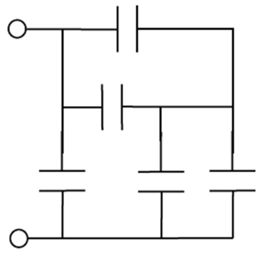

Рис. 14.10. К задаче 14.67

14.68. К конденсатору 1 емкости C, заряженному до разности потенциалов U, подсоединяется батарея из пяти разряженных конденсаторов такой же емкости (рис. 14.11). Найдите заряд каждого из шести конденсаторов после их соединения.

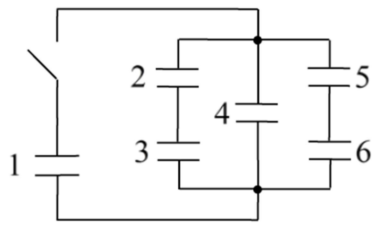

Рис. 14.11. К задаче 14.68

14.69. Три одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно. При этом электроемкость системы конденсаторов $C = 89$ пФ. Площадь каждой пластины $S = 100$ см^2. Диэлектрик – стекло ($\varepsilon = 7$). Найдите толщину стекла. Определите также электроемкость системы в случаях, когда: а) все конденсаторы соединены параллельно; б) два последовательно и один параллельно; 3) два параллельно и один последовательно.

14.70. Конденсаторы, имеющие электроемкости $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, включены в цепь с напряжением $U = 1{,}1$ кВ. Определите энергию каждого конденсатора в случаях: а) последовательного их включения; б) параллельного включения.

14.71. При последовательном соединении трех различных конденсаторов емкость цепи равна $C_0 = 0{,}75$ мкФ, а падение напряжения на конденсаторе $C_1 = 3$ мФ равно $U_1 = 20$ В. При параллельном соединении конденсаторов емкость цепи равна $C = 7$ мкФ. Определите неизвестные емкости C_2 и C_3 двух конденсаторов и падения напряжения U_2 и U_3 на них при последовательном соединении.

14.72. Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов $C_1 = 10^{-6}$ Ф, $C_2 = 2\cdot10^{-6}$ Ф, $C_3 = 3\cdot10^{-6}$ Ф присоединена к аккумулятору, который сообщил батарее заряд $q = 10^{-4}$ Кл. Определите напряжения на каждом конденсаторе, ЭДС аккумулятора и общую емкость батареи конденсаторов.

14.73. Имеется три различных конденсатора, емкость одного из них $C_1 = 2$ мкФ. Когда все три конденсатора соединены последовательно, емкость цепи равна $C_0 = 1$ мкФ; когда параллельно, то емкость цепи $C = 1$ мкФ. Определите емкости двух неизвестных конденсаторов C_2 и C_3.

14.74. Три последовательно соединенных конденсатора присоединены к источнику напряжения $U = 32$ В. Емкости конденсаторов $C_1 = 0{,}1$ мкФ, $C_2 = 0{,}25$ мкФ и $C_3 = 0{,}5$ мкФ. Определите напряжения и заряды на каждом конденсаторе, а также энергию каждого из них.

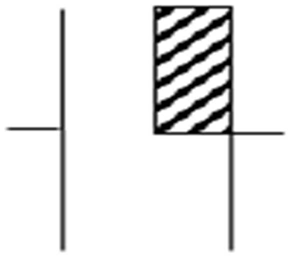

Рис. 14.12. К задаче 14.75

14.75. В воздушный конденсатор внесена диэлектрическая пластинка ($\varepsilon = 2$), занимающая половину верхней части зазора (как указано на рис. 14.12). Определите, во сколько раз изменилась емкость конденсатора при внесении в него пластинки.

Практическое занятие № 15

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Цель занятия

Знакомство с основными характеристиками электрического тока, законами постоянного тока и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

В проводнике воздействие электрического поля может приводить к упорядоченному движению элетрических зарядов – электрическому току. Для протекания тока необходимо наличие в данной среде носителей заряда, которые могли бы перемещаться по проводнику. Обычно это электроны в металлах, электроны и дырки в полупроводниках, ионы в электролитах, ионы и электроны в газах. Вторым условием существования тока является наличие в среде электрического поля неэлектростатического происхождения, энергия которого затрачивалась бы на перемещение зарядов. Таким образом, необходим источник электрической энергии – устройство, в котором осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

Сила тока I (скалярная величина) определяется электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение S проводника в единицу времени:

$$I = dq/dt.$$

За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов. Распределение тока по сечению определяет векторная величина, называемая плотностью тока:

$$j = dI/dS.$$

Плотность тока в проводнике определяется направлением и величиной средней скорости упорядоченного движения $\vec{\upsilon}_{\text{ср}}$ свободных носителей, имеющих заряд e и концентрацию n:

$$\vec{j} = ne\vec{\upsilon}_{\text{ср}}.$$

Сила и плотность тока связаны между собой:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} .$$

Для постоянного тока справедливы соотношения:

$$I = \frac{q}{t}, \qquad j = \frac{I}{S}.$$

Согласно экспериментально установленному закону Ома, сила тока I при его протекании по однородному металлическому проводнику пропорциональна разности потенциалов (напряжению) U на его концах:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Здесь R – электрическое сопротивление проводника, зависящее от его формы и размеров, а также от свойств материала (удельного электрического сопротивления ρ), из которого он изготовлен, и от температуры. Для однородного цилиндрического проводника длиной l и поперечным сечением S:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad \rho = \rho_0 \alpha T, \qquad \alpha \approx \frac{1}{273}\ \text{К}^{-1}.$$

Воздействие только сил электростатического поля приводит к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Для поддержания тока необходимо наличие сторонних сил, действующих либо на всем протяжении цепи, либо на отдельных ее участках. Для количественной оценки сторонних сил вводят понятие поля сторонних сил, которое характеризуют либо напряженностью поля сторонних сил $\vec{E}_{\text{ст}}$, либо работой $\mathcal{E} = A/q$, совершаемой сторонними силами при перемещении единичных положительных зарядов (называемой электродвижущей силой, ЭДС). На неоднородном участке цепи (где есть сторонние силы, т. е. $\mathcal{E}_{12} \neq 0$) напряжение определяется соотношением

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

и только для однородного участка цепи напряжение совпадает с разностью потенциалов на его концах:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Обобщением закона Ома для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной (т. е. относящейся к точке с удельной электрической проводимостью $\sigma = 1/\rho$) формах являются соотношения:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}.$$

В случае замкнутой цепи (рис. 15.1)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

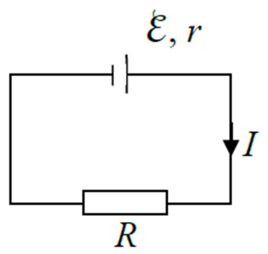

Рис. 15.1. Простейшая замкнутая цепь

Разность потенциалов (напряжение) на зажимах источника

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = IR = \mathcal{E} - IR$$

равна ЭДС только в том случае, если цепь разомкнута ($I = 0$), в замкнутой цепи они всегда меньше ЭДС.

В табл. 15.1 приведены формулы для напряжения, силы тока и результирующего сопротивления при последовательном и параллельном соединении проводников.

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Таблица 15.1

Формулы для последовательного и параллельного соединениия проводников

Соединение	
последовательное	параллельное
Сохраняемая величина	
$I_1 = I_2 = ... = I_n = I$ $I = \text{const}$	$U_1 = U_2 = ... = U_n = U$ $U = \text{const}$
Суммируемая величина	
Напряжение $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$	Сила тока $I = \sum_{i=i}^{n} I_i$
Результирующее сопротивление	
$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$	$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$$

выражает второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС $\mathcal{E}_k$, встречающихся в этом контуре.

Примеры решения типовых задач

Задача 15-1. Цепь состоит из аккумулятора с внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом и нагрузки $R = 15$ Ом. При подключении к нагрузке некоторого резистора R_0 параллельно, а затем последовательно, ток через этот резистор не меняется. Определите сопротивление резистора.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая цепь в случаях параллельного и последовательного подключения резистора R_0 изображена на рис. 15.2.

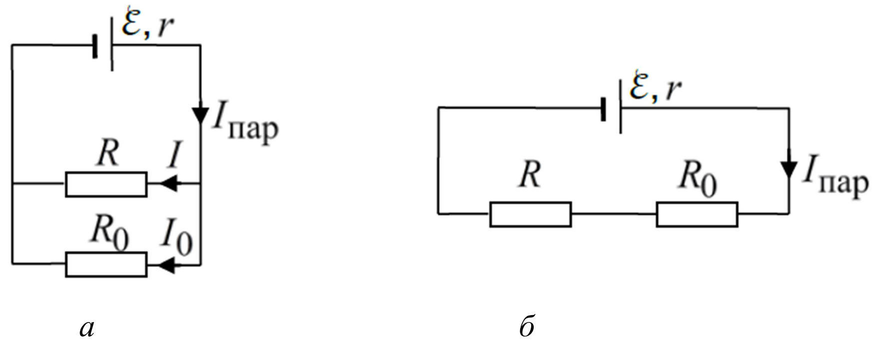

Рис. 15.2. К задаче 15-1

При параллельном и последовательном подключении резисторов их общие сопротивления рассчитываются по приведенным ниже формулам:

$$R_{\text{пар}} = \frac{RR_0}{R + R_0}, \quad R_{\text{посл}} = R + R_0.$$

Токи, создаваемые источником $\mathcal{E}$, для случаев, представленных на рис. 15.2, находятся по формулам:

$$I_{\text{пар}} = \mathcal{E}/(R_{\text{пар}} + r), \quad I_{\text{посл}} = \mathcal{E}/\left(R_{\text{посл}} + r\right).$$

По условию задачи токи, текущие через резистор R_0, равны между собой. Отметим, что в отличие от случая последовательного соединения резисторов, где во всех участках цепи, в том числе и через рассматриваемый резистор, протекает одинаковый ток $I_{\text{посл}}$, в случае их параллельного соединения через резистор R_0 протекает только часть I_0 от тока $I_{\text{пар}}$, которая может быть рассчитана из соотношений:

$$\begin{cases} I_{\text{пар}} = I + I_0; \\ IR = I_0 R_0. \end{cases}$$

Для нахождения тока I_0 получаем формулу

$$I_0 = \frac{I_{\text{пар}} R}{R_0 + R} = \mathcal{E}R/(RR_0 + r\left(R + R_0\right)),$$

которая позволяет записать соотношение $I_0 = I_{\text{посл}}$ в виде

$$\mathcal{E}R/(RR+r(R+R))=\mathcal{E}R/(R+R+r).$$

В результате простых алгебраических преобразований для расчета R_0 имеем

$$R_0=\frac{R^2}{r}=45\ \text{Ом}.$$

Задача 15-2. Два источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 4$ В и $\mathcal{E}_2 = 6$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом соединены последовательно. При каком внешнем сопротивлении цепи разность потенциалов между зажимами одного из источников будет равна нулю?

Решение. Выделим точки *1–3* в рассматриваемой схеме (рис. 15.3).

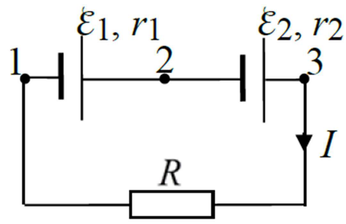

Рис. 15.3. К задаче 15-2

В соответствии с законом Ома для замкнутой цепи ток, протекающий в цепи, равен

$$I=(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)/(r_1+r_2+R).$$

По условию задачи либо $\varphi_1-\varphi_2=0$, либо $\varphi_2-\varphi_3=0$. Рассмотрим оба этих случая.

1. $\varphi_1-\varphi_2=0$. Закон Ома для участка цепи *1–2*:

$$Ir_1=\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_1.$$

Используя выражение для тока, получим соотношение

$$(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)r_1=\mathcal{E}_1(r_1+r_2+R),$$

из которого рассчитаем внешнее сопротивление:

$$R = (\mathcal{E}_1 r_1 - \mathcal{E}_2 r_2)/\mathcal{E}_1.$$

Если подставить данные нашей задачи, сопротивление R получается отрицательным. Значит, разность потенциалов на зажимах первого элемента не может быть равной нулю ни при каких значениях внешнего сопротивления.

2. $\varphi_2 - \varphi_3 = 0$. В этом случае закон Ома для участка цепи *2–3* имеет вид:

$$Ir_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2.$$

Используя выражение для тока, получим соотношение

$$(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) r_2 = \mathcal{E}_2 (r_1 + r_2 + R),$$

из которого рассчитаем внешнее сопротивление:

$$R = (\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1)/\mathcal{E}_2.$$

Подставляя данные задачи, получим

$$R = 0{,}033 \text{ Ом}.$$

Задача 15-3. Восемь одинаковых источников ЭДС соединены между собой последовательно, образуя замкнутую цепь. Найдите разность потенциалов на зажимах каждого источника.

Р е ш е н и е. Поскольку все источники соединены последовательно, разветвлений в цепи нет (рис. 15.4).

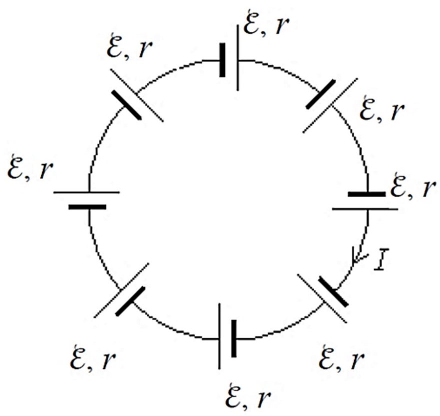

Рис. 15.4. К задаче 15-3

В соответствии с первым правилом Кирхгофа через все источники протекает один и тот же ток. Для его расчета воспользуемся вторым правилом Кирхгофа, применяя его к рассматриваемой цепи:

$$8Ir = 8\mathcal{E}.$$

Из этого соотношения следует, что ток, протекающий по цепи, равен

$$I = \mathcal{E}/r.$$

Все источники находятся в одинаковых условиях, поэтому разность потенциалов на зажимах всех источников должна быть одинаковой. Для ее расчета воспользуемся законом Ома для участка цепи, содержащей любую ЭДС:

$$Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Отсюда следует, что искомая разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ir - \mathcal{E} = \mathcal{E}r/r - \mathcal{E} = 0.$$

Этот результат можно получить воспользовавшись соображениями симметрии: все точки, в которых соединяются источники, абсолютно эквивалентны между собой. Их потенциалы должны быть одинаковы, а разность одинаковых потенциалов равна нулю.

Задача 15-4. Элементы цепи, изображенной на рис. 15.5, имеют следующие значения $\mathcal{E}_1 = 4$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В, $\mathcal{E}_3 = 8$ В, $r_1 = r_2 = r = 0{,}2$ Ом, $r_3 = 0{,}1$ Ом, $R = 1{,}8$ Ом. Найдите токи во всех участках цепи, разность потенциалов между точками A и B и количество тепла, выделяющегося на внешнем сопротивлении R и внутри источников за одну минуту.

Решение. Через три источника рассматриваемой цепи $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ протекают различные токи, которые обозначим как I_1, I_2, I_3, соответственно. Направления токов предугадать нельзя, поскольку третий источник включен навстречу первым двум.

Будем считать, что токи текут по часовой стрелке (рис. 15.5).

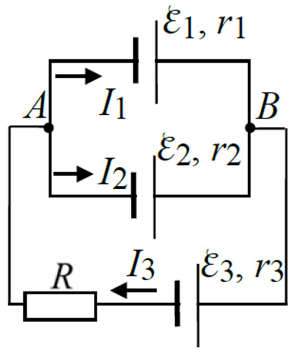

Рис. 15.5. К задаче 15-4

Если при решении задачи для какого-либо тока получится отрицательный ответ, значит, ток на данном участке течет в противоположную сторону.

Расчет токов в цепи проводится с помощью правил Кирхгофа. В рассматриваемой разветвленной цепи имеются два узла (A и B), и можно мысленно выделить три замкнутых контура. Первое правило Кирхгофа записывается для ($N - 1$) узла цепи (в нашем случае для одного):

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа должно быть записано для любых двух мысленно выделенных замкнутых контуров, например:

$$I_1 r_1 + I_3(r_3 + R) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3;$$

$$I_2 r_2 + I_3(r_3 + R) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3.$$

Уравнение, которое может быть записано для третьего контура, не несет никакой дополнительной информации, поскольку сам контур не содержит участков, не описанных двумя предыдущими уравнениями.

Рассматривая три написанных выше уравнения для токов как систему трех уравнений с тремя неизвестными, для расчета токов получим следующие соотношения:

$$I_1 = [\mathcal{E}_1(r + r_3 + R) - \mathcal{E}_2(r_3 + R) - \mathcal{E}_3 r]/r(2R + r + 2r_3) = -2{,}375\ \text{А};$$

$$I_2 = [\mathcal{E}_2(r + r_3 + R) - \mathcal{E}_1(r_3 + R) - \mathcal{E}_3 r]/r(2R + r + 2r_3) = 2{,}625\ \text{А};$$

$$I_3 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)/(r + 2r + 2R) = 0{,}25\ \text{А}.$$

Ток I_1 получился отрицательным, что означает, что на самом деле ток I_1 течет в противоположную сторону, т. е. справа налево.

Для расчета разности потенциалов между точками A и B воспользуемся законом Ома, записанным для любого из участков, соединяющих точки A и B, например:

$$I_2 r_2 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_2.$$

Отсюда для искомой разности потенциалов будем иметь

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = 4{,}475 \text{ В}.$$

Количество тепла, выделившегося на сопротивлении R за время t, равное одной минуте, определим по формуле

$$Q = I_3^2 R t = (0{,}25)^2 \cdot 1{,}8 \cdot 60 = 6{,}75 \text{ Дж}.$$

Для расчета количества тепла, выделившегося в источниках, используем соотношения:

$$Q_1 = I_1^2 r_1 t = 67{,}69 \text{ Дж};$$

$$Q_2 = I_2^2 r_2 t = 82{,}69 \text{ Дж};$$

$$Q_3 = I_3^2 r_3 t = 0{,}375 \text{ Дж}.$$

Неправильное включение источника $\mathcal{E}_3$ (навстречу первым двум, а не согласно им) приводит к тому, что основное тепло выделяется внутри источников $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, а не на внешнем сопротивлении R.

Задача 15-5. Чтобы определить место повреждения изоляции двухпроводного кабеля телефонной линии длиной L = 4 км, к одному ее концу подсоединили батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ = 15 В. При этом оказалось, что если провода у другого конца линии разомкнуты, то сила тока, проходящего через батарею, равна I_1 = 1 А, а если замкнуты накоротко, то сила тока равна I_2 = 1,8 А. Определите по этим данным место повреждения и сопротивление R изоляции в этом месте. Сопротивление каждого провода линии R_0 = 5 Ом. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Р е ш е н и е. Нарушение изоляции в каком-либо месте линии эквивалентно включению в этом месте резистора с некоторым сопротивлением R (рис. 15.6). Если конец линии разомкнут, то согласно закону Ома

$$\mathcal{E} = (2x\rho + R) I_1,$$

откуда

$$x = \frac{\mathcal{E}}{2\rho I_1} - \frac{R}{2\rho},$$

где x – расстояние до поврежденного участка; ρ – сопротивление единицы длины провода:

$$\rho = \frac{R_0}{L} = 1{,}25\ \text{Ом/км}.$$

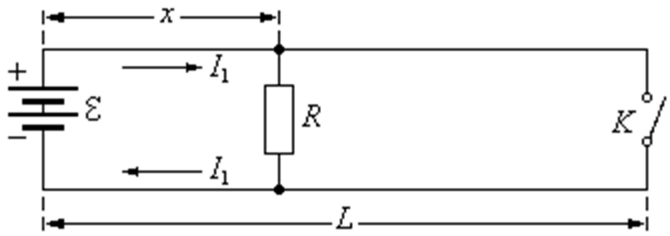

Рис. 15.6. К задаче 15-5

При замыкании ключа K на конец линии параллельно сопротивлению R подключается короткозамкнутый участок линии. Закон Ома для этого случая дает

$$\mathcal{E} = \left[2x\rho + \frac{R \cdot 2(L - x)\rho}{R + 2(L - x)\rho} \right] I_2 .$$

Подставив в эту формулу выражение для x, получим квадратное уравнение для определения R:

$$I_2 R^2 - 2\mathcal{E}\left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) R + \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right)\left(\frac{\mathcal{E}^2}{I_1^2} - 2L\rho\mathcal{E} \right) = 0 .$$

Подстановка данных задачи в полученные уравнения даст следующее квадратное уравнение:

$$1{,}8R^2 - 24R + 60 = 0,$$

откуда получим, что

$$R_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{3{,}6} \text{ Ом.}$$

Таким образом, рассчитанные сопротивления могут быть равны R_1 = 10 Ом, $R_2 \approx$ 3,3 Ом. Соответствующие значения координаты x точки повреждения: x_1 = 2 км, x_2 = 4,7 км.

Очевидно, что значение x_2 = 4,7 км не соответствует условию задачи, так как вся длина линии $L = 4$ км. Следовательно, не подходит и второе значение $R_2 \approx$ 3,3 Ом. Таким образом, повреждение изоляции произошло точно посередине линии (x = 2 км), а сопротивление изоляции в этом месте стало равным R = 10 Ом.

Вопросы и задания для самостоятельного решения

15.1. При каких условиях может существовать ток?

15.2. Что характеризуют и как находятся сила и плотность тока?

15.3. Как связаны между собой сила и плотность тока?

15.4. Какой вид имеет закон Ома для однородного проводника в интегральной и дифференциальной формах?

15.5. Что характеризует сопротивление проводника, и от чего оно зависит?

15.6. Как меняется удельное сопротивление проводника с температурой?

15.7. Почему для поддержания тока необходимо наличие поля сторонних сил?

15.8. Как определяются ЭДС и напряженность поля сторонних сил, и как они связаны между собой?

15.9. Какой вид имеет закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах?

15.10. Какой вид имеет закон Ома для замкнутой цепи?

15.11. Что такое напряжение? Чем оно отличается от разности потенциалов в случае неоднородной цепи?

15.12. Как находится напряжение на зажимах источника?

15.13. Какой вид имеет первое правило Кирхгофа, и каков его физический смысл?

15.14. Как записывается второе правило Кирхгофа?

15.15. Какова последовательность действий при расчете цепей постоянного тока?

15.16. По проводу течет ток силой $I = 10$ А. Найдите массу электронов, проходящих через поперечное сечение этого провода за время $t = 1$ час.

15.17. Ток в проводнике меняется со временем по закону $I = 5 + t$, где ток измеряется в амперах, а время – в секундах. Какое количество электричества q проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 10$ с? При каком постоянном токе I_0 за то же время через поперечное сечение проводника проходит такое же количество электричества?

15.18. Обмотка катушки из медной проволоки при $t_1 =$ 14 °С имеет сопротивление $R_1 = 10$ Ом. После пропускания тока сопротивление обмотки стало равным $R_2 =$ 12,2 Ом. До какой температуры t_2 нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha = 4{,}15 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

15.19. Определите площадь поперечного сечения S и длину алюминиевой проволоки, если ее сопротивление $R = 0{,}2$ Ом, а масса $m = 54$ г. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, а его удельная электрическая проводимость $\sigma = 3{,}6 \cdot 10^7$ (Ом · м)$^{-1}$.

15.20. Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных кусков провода, сделанных из одного материала и имеющих одинаковую длину, но разные сечения $S_1 = 10^{-6}$ м^2, $S_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ м^2, $S_3 = 3 \cdot 10^{-6}$ м^2. Разность потенциалов на концах цепи равна $U = 11$ В. Определите падение напряжения на каждом проводнике.

15.21. К батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В подключили резистор сопротивлением $R = 20$ Ом, при этом напряжение на резисторе оказалось равным $U = 2$ В. Определите ток короткого замыкания.

15.22. Элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом. Найдите напряжение на зажимах элемента при токе в цепи $I = 0{,}25$ А. Каково внешнее сопротивление цепи при этих условиях?

15.23. Элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}6$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом. Найдите КПД элемента при токе в цепи $I = 2{,}4$ А.

15.24. Определите отношение разности потенциалов на зажимах элемента к его ЭДС, если внутреннее сопротивление элемента r в n раз меньше внешнего сопротивления R. Рассчитайте это отношение для: а) $n = 0{,}1$; б) $n = 1$; в) $n = 10$.

15.25. Источник с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединен последовательно с внешним сопротивлением и амперметром. Определите КПД элемента, если амперметр показывает ток $I = 1$ А.

15.26. Определите заряд Q конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ (рис. 15.7), если $\mathcal{E} = 10$ В, $R_1 = 100$ Ом $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 60$ Ом, $r = 25$ Ом.

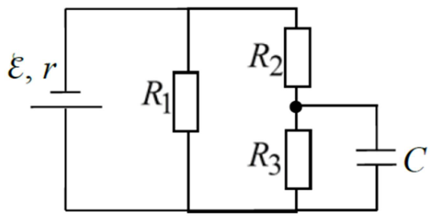

Рис. 15.7. К задаче 15.26

15.27. Определите ЭДС батареи, включенной в цепь (рис. 15.8), если известно, что напряженность электрического поля в плоском конденсаторе $E = 2{,}5 \cdot 10^3$ В/м. Внутреннее сопротивление батареи $r = 0{,}5$ Ом, сопротивление $R = 4{,}5$ Ом, расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 0{,}2$ см.

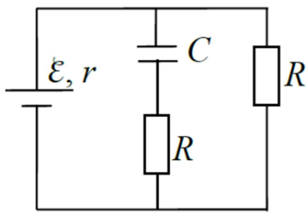

Рис. 15.8. К задаче 15.27

15.28. Определите внутреннее сопротивление батареи, если известно, что когда параллельно конденсатору, присоединенному к зажимам батареи, подключили резистор сопротивлением $R = 15$ Ом, заряд на конденсаторе уменьшился в $n = 1{,}2$ раза.

15.29. К батарее через переменное сопротивление подключен вольтметр. Если сопротивление уменьшить второе, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменится показание вольтметра, если сопротивление уменьшить до нуля?

15.30. В цепь, состоящую из аккумулятора и подключенного к нему резистора сопротивлением $R = 20$ Ом, подключили вольтметр сопротивлением $R_V = 500$ Ом сначала последовательно, а затем параллельно резистору. Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

15.31. Амперметр рассчитан на измерение максимального тока $I_{max} = 0{,}1$ А, при этом падение напряжения на амперметре $U = 0{,}2$ В. Каким сопротивлением необходимо зашунтировать прибор, чтобы им можно было измерять ток до $I = 2$ А?

15.32. Если к амперметру, рассчитанному на максимальную силу тока $I_A = 2$ А, присоединить шунт сопротивлением $R_ш = 0{,}5$ Ом, то цена деления шкалы амперметра возрастает в $n = 10$ раз. Рассчитайте добавочное сопротивление, которое нужно присоединить к этому амперметру, чтобы его можно было использовать как вольтметр для измерения напряжений до $U = 220$ В.

15.33. Определите ток, текущий в цепи (рис. 15.9), и разность потенциалов на зажимах элементов, если $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $r_1 = 0{,}1$ Ом, $\mathcal{E}_2 = 6$ В, $r_2 = 0{,}4$ Ом, $R = 3{,}5$ Ом.

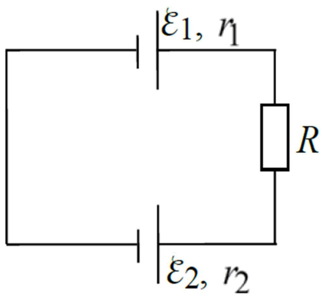

Рис. 15.9. К задаче 15.33

15.34. Два аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 57$ В и $\mathcal{E}_2 = 32$ В соединены как показано на рис. 15.10. Определите показания вольтметра с бесконечно большим сопротивлением, если отношения внутренних сопротивлений аккумуляторов $r_2 / r_1 = 1{,}5$.

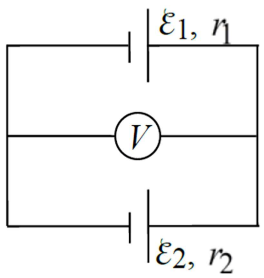

Рис. 15.10. К задаче 15.34

15.35. В цепи, изображенной на рис. 15.11, все вольтметры одинаковые. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 9$ В, ее внутреннее сопротивление мало. Вольтметр V_1 показывает $U_1 = 4$ В. Что показывают остальные вольтметры?

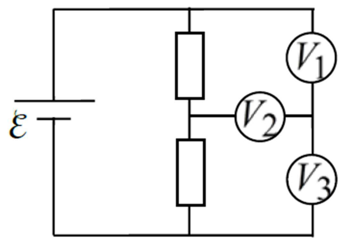

Рис. 15.11. К задаче 15.35

15.36. Элементы имеют ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом, сопротивления $R_1 = R_2 = 2$ Ом и $R_3 = 1$ Ом, сопротивление амперметра $R_A =$ 3 Ом (рис. 15.12). Найдите показание амперметра.

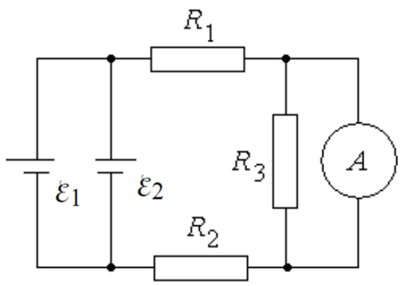

Рис. 15.12. К задаче 15.36

15.37. Элемент имеет ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В, сопротивления $R_1 = 2$ кОм и $R_2 = 3$ кОм, сопротивления вольтметров $R_{V_1} = 3$ кОм и $R_{V_2} = 2$ кОм (рис. 15.13). Найдите показания вольтметров V_1 и V_2, если ключ K: а) разомкнут; б) замкнут.

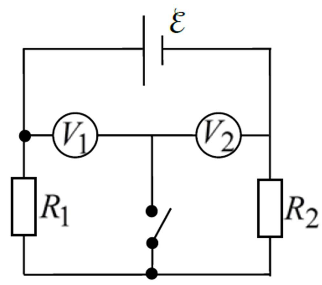

Рис. 15.13. К задаче 15.37

15.38. Найдите токи в отдельных ветвях мостика Уитстона (рис. 15.14) при условии, что ток, текущий через гальванометр, равен нулю. ЭДС элемента $\mathcal{E} = 2$ В, сопротивления $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 45$ Ом и $R_3 = 200$ Ом. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

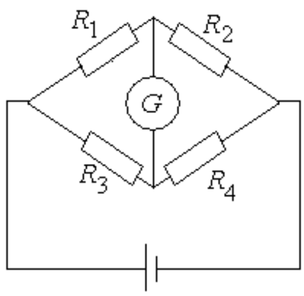

Рис. 15.14. К задаче 15.38

15.39. Два элемента замкнуты на внешнее сопротивление R (рис. 15.15). Рассчитайте токи в цепи и разность потенциалов на зажимах элементов, если $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $r_1 = 1$ Ом, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_2 = 2$ Ом, $R = 6$ Ом.

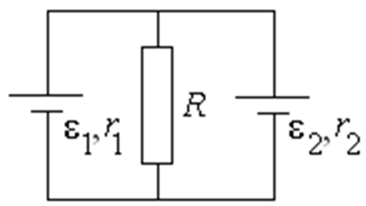

Рис. 15.15. К задаче 15.39

15.40. В схеме, изображенной на рис. 15.16, ЭДС элементов $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 0{,}8$ Ом, $R_1 = 0{,}5$ Ом, $R_2 = 1{,}2$ Ом. Найдите токи в цепи и разность потенциалов на зажимах элементов.

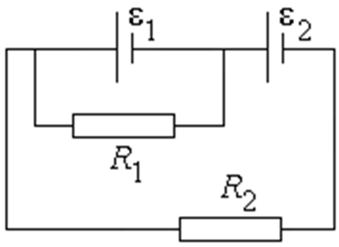

Рис. 15.16. К задаче 15.40

15.41. ЭДС элементов $\mathcal{E}_1 = 2{,}1$ В, $\mathcal{E}_2 = 1{,}9$ В, сопротивления $r_1 = r_2 = 10$ Ом, $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 45$ Ом (рис. 15.17). Найдите токи во всех участках цепи и разность потенциалов на зажимах элементов.

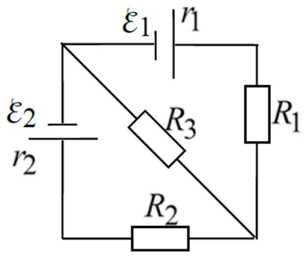

Рис. 15.17. К задаче 15.41

15.42. Батареи имеют ЭДС $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 1$ Ом, $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_A = 1$ Ом (рис. 15.18). Найдите показание амперметра и разность потенциалов между узлами цепи.

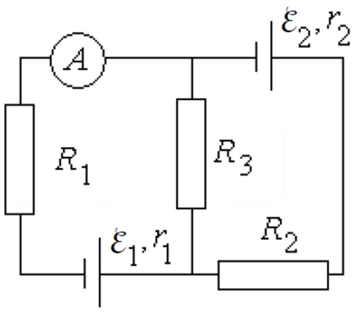

Рис. 15.18. К задаче 15.42

15.43. ЭДС батарей $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 1$ В, сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 0{,}5$ кОм, $R_3 = 0{,}2$ кОм, сопротивление амперметра $R_A = 0{,}2$ кОм (рис. 15.19). Найдите показание амперметра и разность потенциалов между узлами.

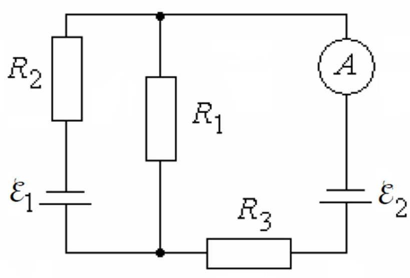

Рис. 15.19. К задаче 15.43

15.44. В схеме (рис. 15.20) $\mathcal{E}_1 = 100$ В, $\mathcal{E}_2 = 150$ В, $r_1 = r_2 = 10$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 20$ Ом и $R_3 = 40$ Ом, $R_4 = 40$ Ом, $R_A = 5$ Ом. Найдите токи в цепи.

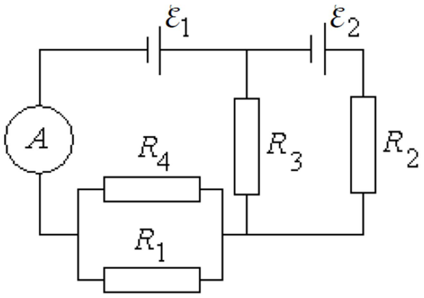

Рис. 15.20. К задаче 15.44

15.45. Батареи имеют ЭДС $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $\varepsilon_3 = 6$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом (рис. 15.21). Сопротивления $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом и $R_3 = 8$ Ом. Найдите токи во всех участках цепи, разность потенциалов на зажимах каждого элемента и между узлами цепи.

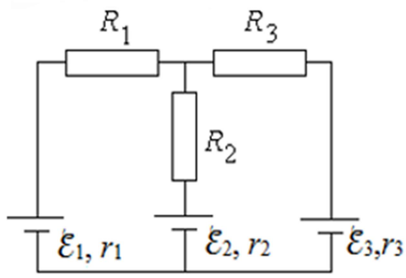

Рис. 15.21. К задаче 15.45

15.46. В схеме, изображенной на рис. 15.22, $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, $\mathcal{E}_3 = 4$ В, $r_1 = r_2 = r_3 =$ 0,5 Ом, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом. Найдите токи во всех участках цепи и разность потенциалов на зажимах каждого элемента.

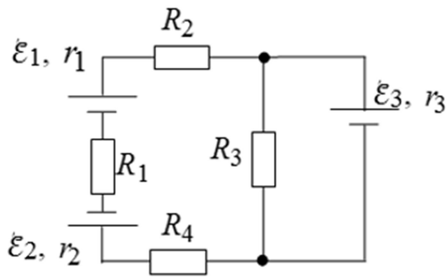

Рис. 15.22. К задаче 15.46

15.47. В схеме, изображенной на рис. 15.23, использованы источники, имеющие ЭДС $\mathcal{E}_1 = 2{,}5$ В, $\mathcal{E}_2 = 2{,}2$ В, $\mathcal{E}_3 = 3$ В и внутреннее сопротивление сопротивления $r_1 = r_2 = r_3 = 0{,}2$ Ом. Внешнее сопротивление $R = 4{,}7$ Ом. Определите токи в цепи и разность потенциалов между узлами $\mathcal{E}_1$, r_1, $\mathcal{E}_3$, r_3.

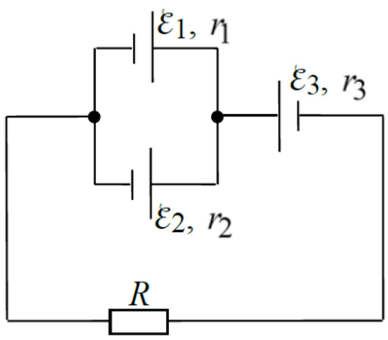

Рис. 15.23. К задаче 15.47

15.48. Два гальванических элемента (рис. 15.24), имеющие ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathcal{E}_2 = 1{,}6$ В и внутренние сопротивления $r_1 = 0{,}6$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом, соединены разноименными полюсами. Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить разность потенциалов на зажимах элементов (между точками *а* и *б*).

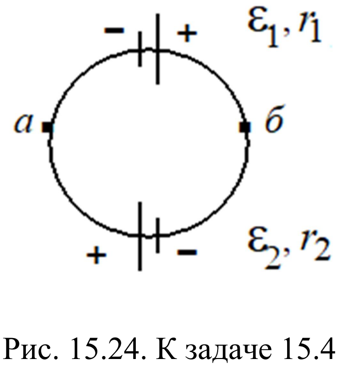

Рис. 15.24. К задаче 15.48

15.49. Три источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1$ = 1,8 В, $\mathcal{E}_2$ =1,4 В и $\mathcal{E}_3$ =1,1 В соединены накоротко одноименными полюсами. Внутреннее сопротивление первого источника r_1=0,4 Ом, второго – r_2 = 0,6 Ом. Определите внутреннее сопротивление третьего источника, если через первый источник идет ток I_1=1,13 А.

15.50. Концентрация электронов проводимости в металле равна n = 2,5·10^{22} см$^{-3}$. Определите среднюю скорость их упорядоченного движения при плотности тока j = 1 А/мм^2.

Практическое занятие № 16

РАБОТА И МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Цель занятия

Знакомство с работой и мощностью электрического постоянного тока, законом Джоуля-Ленца и формирование навыков решения задач по данной теме.

Основные понятия и формулы

Работа A по перемещению заряда в однородном проводнике сопротивлением R, к концам которого приложено напряжение U, и по закону Ома для однородного участка цепи, через который протекает ток

$$I = \frac{U}{R},$$

определяется соотношением

$$A = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t,$$

где t – время, в течение которого происходит перенос заряда $q = It$ через поперечное сечение проводника.

Мощность тока P, равная работе A, совершаемой током за единицу времени t:

$$P = \frac{dA}{dt},$$

которая в случае постоянного тока определяется соотношением $P = A/t$ может быть рассчитана по формуле

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

В случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нем не совершается, работа, совершаемая током, затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего он нагревается. Количество теплоты Q, выделяемое в проводнике вследствие закона сохранения и превращения энергии, равно работе, совершаемой током:

$$Q = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

Это соотношение носит название закона Джоуля – Ленца.

Необратимые превращения электрической энергии в тепловую объясняются взаимодействием электронов с ионами проводника. Электроны, увеличившие свою кинетическую энергию за счет сил электрического поля, при столкновении с ионами передают им свою энергию. Вследствие этого увеличивается интенсивность колебаний ионов около положения равновесия, а следовательно, возрастает и температура, являющаяся мерой средней энергии хаотичного движения атомов, из которых состоит проводник.

От формулы, определяющей количество теплоты, выделяющейся во всем проводнике, можно перейти к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника. Для этого вводится удельная тепловая мощность тока $Q_{\text{уд}}$ – количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени. Эта величина может быть рассчитана с помощью соотношения

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2 = \frac{1}{\sigma} j^2.$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$, имеем

$$Q_{\text{уд}} = \sigma E^2$$

Это выражение представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля-Ленца, пригодную для любого проводника при условии, что действующие в нем сторонние силы имеют нехимическое происхождение.

Примеры решения типовых задач

Задача 16-1. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r = 0,08 Ом при силе тока I_1 = 4,0 А отдает нагрузке мощность P_1 = 8,0 Вт. Какую мощность он отдает во внешнюю цепь при силе тока I_2 = 6,0 А?

Решение. При силе тока I_1 мощность P_1, отдаваемая аккумулятором во внешнюю цепь (рис. 16.1), равна

$$P_1 = \mathcal{E} I_1 - I_1^2 r,$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС аккумулятора. Произведение $\mathcal{E} I_1$ определяет его полную мощность. $I_1^2 r$ равна мощности, «рассеиваемой» на внутренем сопротивлении r.

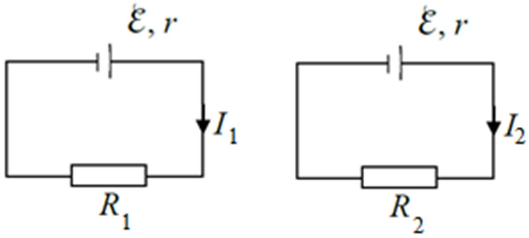

Рис. 16.1. К задаче 16-1

Аналогично во втором случае мощность P_2, отдаваемая аккумулятором во внешнюю цепь при токе I_2, равна

$$P_2 = \mathcal{E} I_2 - I_2^2 r,$$

Исключив из этих соотношений ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}$, получим:

$$P_2 = \left(P_1 + I_1^2 r\right)\frac{I_2}{I_1} - I_2^2 r = 11 \text{ Вт}.$$

Задача 16-2. Найдите мощность, выделяемую во внешней цепи, состоящей из двух одинаковых резисторов, если известно, что в резисторах выделяется одна и та же мощность как при последовательном, так и при их параллельном соединении. Источником служит элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ = 12 В и внутренним сопротивлением r = 2 Ом.

Решение. Мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении R, пропорциональна данному сопротивлению и квадрату протекающего через него тока. Поскольку в обоих рассматриваемых случаях (рис. 16.2) выделяемая на резисторах R мощность одинакова, справедливо соотношение

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2,$$

где $R_1 = 2R$ и $R_2 = R/2$ – общее сопротивление последовательно и параллельно соединенных резисторов.

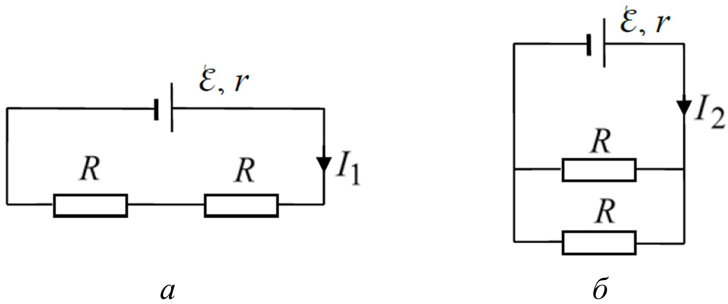

Рис. 16.2. К задаче 16-2: *а* и *б* – последовательное и параллельное соединение резисторов

Токи, текущие в схемах, в обоих случаях также различны. Применяя закон Ома к обеим замкнутым цепям, будем иметь:

$$I_1 = \mathcal{E}/(r + 2R), \qquad I_2 = \mathcal{E}/(r + R/2).$$

Равенство выделяемых во внешней цепи мощностей приводит к соотношению

$$\mathcal{E}\,2R/(r + 2R) = \mathcal{E}\,R/(2(r + R/2)),$$

из которого следует, что сопротивление резистора должно иметь определенную величину:

$$R = r.$$

Теперь, когда известна величина сопротивления R, рассчитаем выделяемую мощность:

$$P = \mathcal{E}\,2R/(r + 2r) = 2\mathcal{E}/9r = 16 \text{ Вт}.$$

Задача 16-3. Во сколько раз следует повысить ЭДС источника, чтобы потери мощности в линии передачи от него к нагрузке снизить в n = 100 раз при условии постоянства мощности источника (генератора)? Внутреннее сопротивление источника считать много меньшим сопротивления линии передачи.

Решение. Полная мощность P_0, выделяющаяся во всей цепи, равна

$$P_0 = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r},$$

где R – сопротивление нагрузки, r – сопротивление линии передачи. Если $R = R_1$, то потеря мощности составит

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}_1^2 r}{\left(R_1 + r\right)^2},$$

где $\mathcal{E}_1$ – первоначальная ЭДС источника тока.

При повышении ЭДС источника до нового значения $\mathcal{E}_2$ изменим сопротивление нагрузки, так как полная мощность источника должна оставаться неизменной. Поэтому

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}_2^2 r}{\left(R_2 + r\right)^2}.$$

Из этих соотношений следует, что для искомой величины n сможем записать соотношение

$$n = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\mathcal{E}_1^2}{\mathcal{E}_2^2}\left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r}\right)^2 = 100.$$

Так как в обоих случаях полная мощность источника остается постоянной:

$$\left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_2^4}{\mathcal{E}_1^4},$$

справедливо соотношение

$$n=\frac{\mathcal{E}_1^2\,\mathcal{E}_2^4}{\mathcal{E}_2^2\,\mathcal{E}_1^4}=\frac{\mathcal{E}_2^2}{\mathcal{E}_1^2}=100.$$

Откуда

$$\mathcal{E}_2 = 10\ \mathcal{E}_1.$$

Вопросы и задания для самостоятельного решения

16.1. Как рассчитывается заряд, переносимый током за некоторое время?

16.2. Как связаны между собой ток и напряжение в однородном проводнике?

16.3. Как может быть рассчитана работа по перемещению заряда в электрической цепи?

16.4. Как работа сил электрического тока зависит от тока в цепи?

16.5. Как работа сил электрического тока зависит от напряжения в цепи?

16.6. Запишите формулу для расчета мощности тока.

16.7. Как мощность тока зависит от приложенного напряжения?

16.8. Как мощность тока зависит от протекающего тока?

16.9. На что затрачивается работа, совершаемая током?

16.10. Что происходит с проводником при протекании тока?

16.11. Какое соотношение носит название закона Джоуля – Ленца?

16.12. Как объясняются необратимые превращения электрической энергии в тепловую?

16.13. Почему при протекании тока возрастает температура проводника?

16.14. Как определяется удельная тепловая мощность тока?

16.15. Как записывается закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме?

16.16. Источник тока замыкается один раз на сопротивление $R_1 = 4$ Ом, а другой раз – на сопротивление R_2 = 9 Ом. В том и другом случае количество тепла, выделяемое на каждом сопротивлении за одно и то же время, одинаково. Определите внутреннее сопротивление источника тока.

16.17. Найдите мощность, выделяемую во внешней цепи, состоящей из двух одинаковых резисторов, если известно, что в резисторах выделяется одна и та же мощность при их последовательном и параллельном соединениях. ЭДС источника $\mathcal{E} = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом.

16.18. К аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом подсоединен нагревательный прибор, в котором выделяется мощность $P = 20$ Вт в виде тепла. Определите сопротивление нагревательного прибора.

16.19. Определите ток короткого замыкания аккумуляторной батареи, если при токе нагрузки $I_1 = 5$ А она отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 9{,}5$ Вт, а при токе нагрузки $I_2 = 8$ А – мощность $P_2 = 14{,}4$ Вт.

16.20. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 0{,}08$ Ом при токе $I_1 = 4$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 8$ Вт. Какую мощность он отдаст во внешнюю цепь при токе $I_2 = 6$ А.

16.21. Определите сопротивление R внешней цепи батареи, при котором во внешней цепи потребляется максимальная мощность. Внутреннее сопротивление батареи равно $r = 1$ Ом.

16.22. В конце зарядки аккумулятора через него течет ток $I_1 = 4$ А. При этом напряжение на его клеммах $U_1 = 12{,}6$ В. При разрядке того же аккумулятора током $I_2 = 6$ А напряжение составило $U_2 = 11{,}1$ В. Определите максимальную мощность, которую может развить на внешнем сопротивлении данный аккумулятор.

16.23. К источнику тока подключены два резистора (рис. 16.1). На первом резисторе выделяется мощность $P_1 = 1$ Вт, на втором $P_2 = 2$ Вт. Какая мощность будет выделяться на втором резисторе, если первый резистор закоротить с помощью ключа K. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

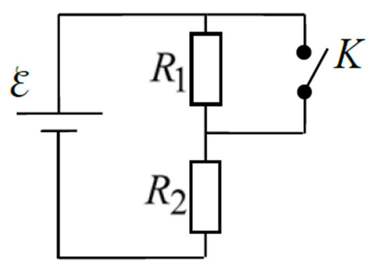

Рис. 16.1. К задаче 11.23

16.24. Зарядка аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В осуществляется от источника питания, напряжение которого $U = 6$ В. Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 0{,}2$ Ом. Определите полезную мощность, расходуемую на зарядку аккумулятора, и мощность, идущую на выделение в нем тепла.

16.25. Определите ЭДС аккумулятора, подзаряжаемого от сети напряжением $U = 12$ В, если половина потребляемой аккумулятором мощности расходуется на теплоту.

16.26. Два нагревательных элемента, подключенных в сеть с напряжением U, выделяют мощности P_1 и P_2, соответственно. Какую мощность будут выделять эти нагреватели, если их включить в ту же сеть а) последовательно; б) параллельно.

16.27. Нагреватель электрического чайника имеет две секции. При включении одной из них вода в чайнике закипит через время $\tau_1 = 2$ мин, при включении другой – через время $\tau_2 = 3$ мин. Через какое время закипит вода в чайнике, если включить обе секции: а) последовательно; б) параллельно?

16.28. Вольтметр, соединенный последовательно с резистором $R = 500$ Ом, при включении в сеть с напряжением $U = 220$ В показывает разность потенциалов $U_1 = 100$ В, а соединенный последовательно с неизвестным резистором R_2 показывает $U_2 = 150$ В. Найдите сопротивление резистора R_2 и выделяемую на нем мощность.

16.29. Электрический чайник с объемом воды $V = 0{,}6$ л при температуре $t = 5{,}4$ °C включили в сеть напряжением $U = 120$ В и забыли выключить. Через сколько времени после включения вся вода в чайнике выкипит, если сопротивление подводящих проводов $R = 8$ Ом, ток в цепи $I = 5$ А и КПД чайника $\eta = 60$ %. Теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

16.30. Электродвигатель питается от батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В. Какую мощность развивает двигатель при протекании по его обмотке тока $I = 2$ А, если при полном затормаживании якоря ток в цепи $I_0 = 3$ А?

16.31. Чему равен КПД электродвигателя, если при включении его в сеть постоянного тока ток $I_0 = 15$ А, а в установившемся режиме ток двигателя $I = 9$ А.

16.32. Электромотор с сопротивлением обмоток $R = 2$ Ом подключен к генератору с ЭДС $\mathcal{E} = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом. При работе мотора через его обмотки проходит ток $I = 10$ А. Найдите КПД электромотора. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

16.33. На какое расстояние L можно передавать электрическую энергию от источника с ЭДС $\mathcal{E}$ при помощи проводов, чтобы на нагрузке сопротивлением R выделялась мощность P. Одножильный провод сечением S выполнен из металла с удельным сопротивлением ρ.

16.34. От батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 500$ В требуется передать энергию на расстояние $l = 2{,}5$ км. Потребляемая мощность $P = 10$ кВт. Найдите минимальные потери мощности ΔP в сети, если диаметр медных подводящих проводов $d = 1{,}5$ см.

16.35. Электроэнергия от генератора мощностью P передается потребителю по проводам, общее сопротивление которых R. ЭДС генератора $\mathcal{E}$. Определите КПД линии передачи, т. е. отношение мощности, выделяемой на полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

16.36. Максимальная мощность, которую может получить потребитель, подключенный к сети с помощью двухпроводной линии передачи, составляет $P_1 = 10$ кВт. Напряжение в сети $U = 120$ В. Определите КПД линии передачи, если из сети к потребителю поступает мощность $P_2 = 1$ кВт.

16.37. Потребителю передается мощность $P = 100$ кВт. Сопротивление линии передачи $R = 5$ Ом, напряжение на шинах электростанции $U = 2$ кВ. На сколько изменится КПД электропередачи, если напряжение на шинах увеличить в $n = 3$ раза, а передаваемую мощность оставить неизменной?

16.38. Потребитель мощностью $P = 1000$ кВт подключен через линию электропередачи сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом к шинам подстанции. Какое напряжение должно быть на шинах подстанции, чтобы потери мощности в линии электропередачи не превышали 5 % от потребляемой мощности?

16.39. Каково сопротивление линии электропередачи, если электростанция мощностью $P = 5$ МВт при напряжении $U = 60$ кВ передает потребителю $\eta = 95$ % энергии?

16.40. До какого значения необходимо повысить напряжение в линии электропередачи сопротивлением $R = 36$ Ом, чтобы от электростанции мощностью $P = 5$ МВт было передано $\eta = 95$ % энергии?

16.41. От генератора с ЭДС $\mathcal{E} = 220$ В требуется передать энергию на расстояние $l = 200$ м. Потребляемая мощность $P = 1$ кВт. Найдите минимальное сечение S медных проводов, если потери мощности в сети не должны превышать $\eta = 1$ %.

16.42. Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы потери мощности в подводящих проводах снизить в 100 раз при условии постоянства отдаваемой генератором мощности?

16.43. Линия имеет сопротивление $R = 80$ Ом. Какое напряжение должен иметь генератор, чтобы потери в линии при передаче мощности $P = 15$ кВт не превышали $\eta = 3$ % передаваемой мощности?

16.44. Имеется 120-вольтовая электрическая лампочка мощностью $P = 40$ Вт. Какое добавочное сопротивление R надо включить последовательно с лампочкой, чтобы она давала нормальный накал при напряжении в сети $U_0 = 220$ В? Какую длину нихромовой проволоки диаметром 0,3 мм надо взять, чтобы получить такое сопротивление?

16.45. В лаборатории, удаленной от генератора на расстояние $L = 100$ м, включили электрический нагревательный прибор, потребляющий ток $I = 10$ А. На сколько понизилось напряжение U на зажимах электрической лампочки, горящей в той лаборатории, если сечения медных подводящих проводов $S = 5$ мм^2?

КОНТРОЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В случае, если образовательной программой предусмотрено выполнение контрольных работ, можно воспользоваться приведенными ниже таблицами, содержащими распределенные по вариантам комбинации задач по различным темам. Так, контрольная работа № 1 включает в себя задачи по физическим основам механики и основам молекулярной физики и термодинамики, а контрольная работа № 2 – по электростатике и на постоянный электрический ток.

Номер варианта – две последние цифры шифра зачетной книжки. Если число больше 50, номер варианта определяется как разность соответствующего числа и 50. Например, последние две цифры дают число 87. Это означает, что необходимо выполнить вариант с номером 37, так как 87 – 50 = 37. Если обе последние цифры – нули, выполняется 50-й вариант.

Контрольная работа № 1

Вариант	Номера заданий							
1	1.1 1.16	2.30 2.45	3.25 3.60	4.7 4.16 4.26	7.25 7.75	8.16 8.26	9.30 9.45	10.1 10.16
2	1.2 1.17	2.29 2.44	3.26 3.59	4.2 4.17 4.27	7.26 7.74	8.17 8.27	9.29 9.44	10.2 10.17
3	1.3 1.18	2.28 2.43	3.27 3.58	4.3 4.18 4.28	7.27 7.73	8.18 8.28	9.28 9.43	10.3 10.18
4	1.4 1.19	2.27 2.42	3.28 3.57	4.4 4.19 4.29	7.28 7.72	8.19 8.29	9.27 9.42	10.4 10.19
5	1.5 1.20	2.26 2.41	3.29 3.56	4.5 4.20 4.30	7.29 7.71	8.20 8.30	9.26 9.41	10.5 10.20
6	1.6 1.21	2.25 2.40	3.30 3.55	4.6 4.21 4.31	7.30 7.70	8.21 8.31	9.25 9.40	10.6 10.21
7	1.7 1.22	2.24 2.39	3.31 3.54	4.7 4.22 4.32	7.31 7.69	8.22 8.32	9.24 9.39	10.7 10.22

Вариант	Номера заданий							
8	1.8 1.23	2.23 2.38	3.32 3.53	4.8 4.23 4.33	7.32 7.68	8.23 8.33	9.23 9.38	10.8 10.23
9	1.9 1.24	2.22 2.37	3.33 3.52	4.9 4.24 4.34	7.33 7.67	8.24 8.34	9.22 9.37	10.9 10.24
10	1.10 1.25	2.21 2.36	3.34 3.51	4.10 4.25 4.35	7.34 7.66	8.25 8.35	9.21 9.36	10.10 10.25
11	1.11 1.26	2.20 2.46	3.35 3.50	4.11 4.16 4.36	7.35 7.65	8.16 8.36	9.20 9.46	10.11 10.26
12	1.12 1.27	2.19 2.47	3.36 3.49	4.12 4.17 4.37	7.36 7.64	8.17 8.37	9.19 9.47	10.12 10.27
13	1.13 1.28	2.18 2.48	3.37 3.48	4.13 4.18 4.38	7.37 7.63	8.18 8.38	9.18 9.48	10.13 10.28
14	1.14 1.29	2.17 2.49	3.38 3.47	4.14 4.19 4.39	7.38 7.62	8.19 8.39	9.17 9.49	10.14 10.29
15	1.15 1.30	2.16 2.50	3.39 3.60	4.15 4.20 4.40	7.39 7.61	8.20 8.40	9.16 9.50	10.15 10.30
16	1.14 1.31	2.29 2.51	3.40 3.59	4.9 4.21 4.41	7.40 7.60	8.21 8.41	9.29 9.51	10.14 10.31
17	1.13 1.32	2.28 2.52	3.41 3.58	4.10 4.22 4.42	7.16 7.59	8.22 8.42	9.28 9.52	10.13 10.32
18	1.12 1.33	2.27 2.53	3.42 3.57	4.11 4.23 4.43	7.17 7.58	8.23 8.43	9.27 9.53	10.12 10.33
19	1.11 1.34	2.26 2.54	3.43 3.56	4.12 4.24 4.44	7.18 7.57	8.24 8.44	9.26 9.54	10.11 10.34

Вариант	Номера заданий							
20	1.10 1.35	2.25 2.55	3.44 3.55	4.13 4.25 4.45	7.19 7.56	8.25 8.45	9.25 9.55	10.10 10.35
21	1.9 1.36	2.24 2.56	3.45 3.54	4.14 4.24 4.46	7.20 7.55	8.24 8.46	9.24 9.56	10.9 10.36
22	1.8 1.37	2.23 2.57	3.46 3.53	4.15 4.23 4.47	7.21 7.54	8.23 8.47	9.23 9.57	10.8 10.37
23	1.7 1.38	2.22 2.58	3.16 3.47	4.8 4.22 4.48	7.22 7.53	8.22 8.48	9.22 9.58	10.7 10.38
24	1.6 1.39	2.21 2.59	3.17 3.48	4.7 4.21 4.49	7.23 7.52	8.21 8.49	9.21 9.59	10.6 10.39
25	1.5 1.40	2.20 2.60	3.18 3.50	4.6 4.20 4.50	7.24 7.51	8.20 8.50	9.20 9.60	10.5 10.40
26	1.4 1.41	2.19 2.33	3.19 3.51	4.5 4.19 4.49	7.25 7.50	8.19 8.49	9.19 9.61	10.4 10.41
27	1.3 1.42	2.18 2.32	3.20 3.52	4.4 4.18 4.48	7.26 7.49	8.18 8.48	9.18 9.62	10.3 10.42
28	1.2 1.43	2.17 2.31	3.21 3.53	4.3 4.17 4.47	7.27 7.48	8.17 8.47	9.17 9.63	10.2 10.43
29	1.1 1.44	2.16 2.44	3.22 3.54	4.2 4.16 4.46	7.28 7.47	8.16 8.46	9.16 9.64	10.1 10.44
30	1.15 1.45	2.30 2.45	3.23 3.55	4.1 4.25 4.45	7.29 7.46	8.25 8.45	9.30 9.65	10.15 10.45
31	1.1 1.46	2.17 2.46	3.24 3.56	4.7 4.24 4.44	7.30 7.45	8.24 8.44	9.17 9.66	10.1 10.46

Вариант	Номера заданий							
32	1.2 1.47	2.18 2.47	3.25 3.57	4.8 4.23 4.43	7.31 7.70	8.23 8.43	9.18 9.67	10.2 10.47
33	1.3 1.48	2.19 2.48	3.26 3.58	4.9 4.22 4.42	7.32 7.74	8.22 8.42	9.19 9.68	10.3 10.48
34	1.4 1.49	2.20 2.49	3.27 3.59	4.10 4.21 4.43	7.33 7.73	8.21 8.43	9.20 9.69	10.4 10.49
35	1.5 1.50	2.21 2.50	3.28 3.60	4.11 4.20 4.44	7.34 7.72	8.20 8.44	9.21 9.70	10.5 10.50
36	1.6 1.51	2.22 2.51	3.16 3.45	4.12 4.19 4.45	7.35 7.71	8.19 8.45	9.22 9.51	10.6 10.51
37	1.7 1.52	2.23 2.52	3.17 3.46	4.13 4.18 4.46	7.36 7.70	8.18 8.46	9.23 9.52	10.7 10.52
38	1.8 1.53	2.24 2.53	3.18 3.47	4.14 4.17 4.47	7.37 7.69	8.17 8.47	9.24 9.53	10.8 1.53
39	1.9 1.54	2.25 2.54	3.19 3.48	4.15 4.16 4.48	7.38 7.68	8.16 8.48	9.25 9.54	10.9 10.54
40	1.10 1.55	2.26 2.55	3.20 3.49	4.15 4.16 4.49	7.39 7.67	8.16 8.49	9.26 9.55	10.10 10.55
41	1.11 1.56	2.27 2.56	3.21 3.50	4.14 4.17 4.50	7.40 7.66	8.17 8.50	9.27 9.56	10.11 10.56
42	1.12 1.57	2.28 2.57	3.22 3.51	4.13 4.18 4.26	7.41 7.65	8.18 8.26	9.28 9.57	10.12 10.57
43	1.13 1.58	2.29 2.58	3.23 3.52	4.12 4.19 4.48	7.42 7.64	8.19 8.48	9.29 9.58	10.13 10.58

Вариант	Номера заданий							
44	1.14 1.59	2.30 2.59	3.24 3.53	4.11 4.20 4.49	7.43 7.63	8.20 8.49	9.30 9.59	10.14 10.59
45	1.15 1.60	2.30 2.60	3.25 3.54	4.10 4.21 4.50	7.44 7.62	8.21 8.50	9.30 9.60	10.15 10.60
46	1.15 1.35	2.29 2.41	3.26 3.55	4.9 4.22 4.30	7.45 7.61	8.22 8.30	9.29 9.61	10.15 10.35
47	1.14 1.36	2.28 2.42	3.27 3.56	4.8 4.23 4.31	7.46 7.20	8.23 8.31	9.28 9.62	10.14 10.36
48	1.13 1.37	2.27 2.33	3.28 3.57	4.7 4.24 4.35	7.47 7.21	8.24 8.35	9.27 9.63	10.13 10.37
49	1.12 1.38	2.26 2.43	3.29 3.58	4.6 4.25 4.33	7.48 7.22	8.25 8.33	9.26 9.65	10.12 10.38
50	1.11 1.39	2.25 2.44	3.30 3.60	4.5 4.21 4.34	7.49 7.23	8.21 8.34	9.25 9.66	10.11 10.39

Контрольная работа № 2

Вариант	Номера заданий				
1	12.1 12.16 12.80	13.41 13.51 13.11	14.1 14.70 14.51	15.6 15.16 15.40	16.25 16.30
2	12.2 12.17 12.79	13.42 13.52 13.12	14.2 14.49 14.52	15.5 15.17 15.41	16.24 16.31
3	12.3 12.18 12.78	13.43 13.53 13.13	14.3 14.48 14.53	15.6 15.18 15.42	16.23 16.32

Вариант	Номера заданий				
4	12.4 12.19 12.77	13.44 13.54 13.14	14.4 14.47 14.54	15.7 15.19 15.43	16.22 16.33
5	12.5 12.20 12.76	13.45 13.55 13.15	14.5 14.26 14.55	15.8 15.20 15.44	16.21 16.34
6	12.6 12.21 12.75	13.46 13.56 13.6	14.6 14.75 14.56	15.9 15.21 15.45	16.20 16.35
7	12.7 12.22 12.74	13.47 13.57 13.7	14.7 14.74 14.57	15.10 15.22 15.46	16.29 16.36
8	12.9 12.23 12.73	13.48 13.58 13.28	14.8 14.73 14.58	15.11 15.23 15.47	16.28 16.37
9	12.10 12.24 12.72	13.49 13.59 13.9	14.9 14.52 14.59	15.12 15.24 15.48	16.27 16.38
10	12.11 12.25 12.71	13.50 13.60 13.10	14.10 14.51 14.60	15.13 15.25 15.49	16.26 16.39
11	12.12 12.26 12.70	13.41 13.60 13.11	14.11 14.50 14.61	15.14 15.26 15.50	16.25 16.40
12	12.13 12.27 12.69	13.42 13.59 13.12	14.12 14.49 14.62	15.15 15.27 15.41	16.24 16.41
13	12.14 12.28 12.68	13.43 13.58 13.13	14.13 14.48 14.63	15.3 15.28 15.42	16.23 16.42
14	12.15 12.29 12.67	13.44 13.57 13.14	14.14 14.47 14.64	15.1 15.29 15.43	16.22 16.43
15	12.8 12.30 12.66	13.45 13.56 13.15	14.15 14.46 14.16	15.2 15.30 15.14	16.21 16.44

Вариант	Номера заданий				
16	12.9 12.21 12.65	13.46 13.55 13.14	14.1 14.45 14.17	15.3 15.31 15.15	16.20 16.45
17	12.10 12.22 12.64	13.47 13.54 13.13	14.2 14.44 14.18	15.4 15.32 15.16	16.39 16.16
18	12.11 12.23 12.63	13.48 13.53 13.12	14.3 14.43 14.19	15.5 15.33 15.17	16.38 16.17
19	12.12 12.24 12.62	13.49 13.52 13.11	14.4 14.42 14.20	15.6 15.34 15.18	16.37 16.18
20	12.13 12.25 12.61	13.50 13.51 13.10	14.5 14.41 14.21	15.7 15.35 15.19	16.36 16.19
21	12.14 12.26 12.60	13.52 13.51 13.9	14.6 14.40 14.22	15.8 15.36 15.20	16.45 16.20
22	12.15 12.27 12.59	13.53 13.32 13.8	14.7 14.59 14.23	15.9 15.37 15.21	16.44 16.21
23	12.1 12.28 12.57	13.46 13.53 13.7	14.8 14.58 14.24	15.10 15.38 15.22	16.43 16.22
24	12.2 12.29 12.58	13.47 13.54 13.6	14.9 14.57 14.25	15.11 15.39 15.23	16.42 16.23
25	12.8 12.55 12.65	13.3 13.17 13.39	14.10 14.56 14.26	15.12 15.40 15.24	16.41 16.24
26	12.9 12.56 12.64	13.4 13.16 13.40	14.11 14.55 14.27	15.13 15.41 15.25	16.40 16.25
27	12.10 12.57 12.63	13.5 13.18 13.34	14.12 14.64 14.28	15.2 15.42 15.26	16.19 16.26

Вариант	Номера заданий				
28	12.11 12.58 12.62	13.6 13.19 13.33	14.13 14.63 14.29	15.3 15.43 15.27	16.18 16.27
29	12.12 12.59 12.61	13.7 13.20 13.32	14.14 14.62 14.30	15.4 15.44 15.28	16.17 16.28
30	12.13 12.60 12.75	13.8 13.21 13.31	14.15 14.61 14.31	15.5 15.45 15.29	16.16 16.29
31	12.14 12.59 12.71	13.9 13.22 13.31	14.1 14.60 14.32	15.6 15.46 15.20	16.45 16.30
32	12.15 12.58 12.72	13.10 13.23 13.32	14.2 14.69 14.33	15.7 15.47 15.21	16.44 16.25
33	12.15 12.57 12.73	13.11 13.24 13.33	14.3 14.68 14.34	15.8 15.48 15.22	16.43 16.24
34	12.14 12.56 12.74	13.12 13.25 13.34	14.4 14.67 14.35	15.9 15.49 15.23	16.42 16.23
35	12.13 12.55 12.75	13.13 13.26 13.35	14.5 14.66 14.36	15.10 15.50 15.24	16.41 16.22
36	12.12 12.54 12.75	13.14 13.27 13.36	14.6 14.75 14.37	15.11 15.41 15.25	16.40 16.21
37	12.15 12.28 12.37	13.41 13.53 13.14	14.7 14.54 14.38	15.12 15.42 15.16	16.39 16.20
38	12.15 12.29 12.38	13.50 13.52 13.13	14.8 14.53 14.39	15.13 15.43 15.17	16.38 16.29
39	12.14 12.30 12.39	13.49 13.51 13.12	14.9 14.52 14.40	15.14 15.44 15.18	16.37 16.28

Вариант	Номера заданий				
40	12.13 12.30 12.40	13.48 13.51 13.11	14.10 14.61 14.41	15.15 15.45 15.19	16.36 16.19
41	12.12 12.29 12.40	13.47 13.52 13.10	14.11 14.70 14.42	15.1 15.46 15.20	16.35 16.18
42	12.11 12.28 12.39	13.8 13.46 13.59	14.12 14.69 14.43	15.2 15.47 15.21	16.34 16.17
43	12.10 12.27 12.38	13.45 13.53 13.8	14.13 14.68 14.44	15.3 15.38 15.22	16.33 16.26
44	12.9 12.26 12.37	13.44 13.54 137	14.14 14.67 14.45	15.4 15.39 15.23	16.32 16.45
45	12.8 12.25 12.36	13.43 13.55 13.6	14.15 14.66 14.46	15.5 15.40 15.24	16.31 16.44
46	12.7 12.24 12.35	13.42 13.56 13.5	14.1 14.75 14.47	15.6 15.41 15.25	16.30 16.43
47	12.6 12.23 12.34	13.41 13.57 13.4	14.2 14.74 14.48	15.7 15.42 15.26	16.29 16.42
48	12.5 12.22 12.33	13.50 13.58 13.3	14.3 14.73 14.49	15.8 15.43 15.27	16.28 16.41
49	12.4 12.21 12.32	13.49 13.59 13.2	14.4 14.72 14.50	15.9 15.44 15.28	16.27 16.40
50	12.3 12.20 12.31	13.48 13.30 13.1	14.5 14.71 14.51	15.10 15.45 15.29	16.26 16.45

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астахов, А. В. Курс физики : учебное пособие. В 3 томах. Том 1. Механика. Кинетическая теория материи / А. В. Астахов. – Москва : Наука, 1977. – 384 с.

2. Бондарев, Б. В. Курс общей физики : учебник для бакалавров : в 3 книгах / Б. В. Бондарев, Г. Г. Спирин, Н. П. Калашников. – Москва : Юрайт, 2019. – 3 кн.

3. Васильев, А. Н. Классическая электродинамика : краткий курс лекций / А. Н. Васильев. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2010. – 288 с.

4. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – Москва : Наука, 1976. – 464 с.

5. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – 3-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Книжный Мир, 2003. – 328 с.

6. Электричество и магнетизм: тестовые задания для рубежного контроля знаний по дисциплине «Физика» / Е. В. Газеева, Е. А. Гонюх, О. С. Зуева [и др.]. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2013. – 71 с.

7. Механика и молекулярная физика: тестовые задания для рубежного контроля знаний по курсу «Физика» / Е. В. Газеева, Е. А. Гонюх, Ф. М. Гумеров [и др.]. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2012. – 72 с.

8. Дмитриева, В. Ф. Физика для профессий и специальностей технического профиля : учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования / В. Ф. Дмитриева. – 8-е изд., стер. – Москва : Academia, 2015. – 448 с.

9. Дмитриева, В. Ф. Физика для профессий и специальностей технического профиля. Сборник задач : учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования / В. Ф. Дмитриева. – 4-е изд., стер. – Москва : Academia, 2014. – 256 с.

10. Зуева, О. С. Физика : учебное пособие для учащихся малого энергетического колледжа КГЭУ : в 2 частях / О. С. Зуева. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2005. – 2 ч.

11. Сборник задач по курсу «Физика» для слушателей вечернего подготовительного отделения / О. С. Зуева, Н. А. Краснова, И. П. Петрученко, Л. И. Челнокова. – Москва : Издательство МЭИ, 1985. – 88 с.

12. Зуева, О. С. Физика : учебное пособие для учащихся Малого энергетического колледжа КГЭУ : в 2 частях / О. С. Зуева. – 2-е изд., испр. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2007. – 84 с.

13. Зуева, О. С. Электричество и магнетизм : краткий курс лекций по физике для студентов заочной и очно-заочной формы обучения / О. С. Зуева, А. И. Килеев. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2006. – 80 с.

14. Зуева, О. С. Физика : учебное пособие для студентов-заочников ускоренной формы обучения / О. С. Зуева, А. И. Килеев. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2005. – Ч. 1. – 129 с.

15. Зуева, О. С. Механика и молекулярная физика : учебное пособие / О. С. Зуева. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2006. – 228 с.

16. Зуева, О. С. Физика : учебное пособие / О. С. Зуева, В. Л. Матухин. – Казань : Казанский государственный энергетический университет 2009. – Ч. 1. – 152 с.

17. Механика и молекулярная физика : методические указания и примеры решения типовых задач по курсу «Физика» / О. С. Зуева, В. Л. Матухин, В. В. Куржунов, Ю. Ф. Зуев. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2001. – 40 с.

18. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – Москва : Наука, 1979. – 368 с.

19. Общая физика : сборник задач / А. П. Кирьянов, И. П. Шапкарин, С. М. Разинова, С. И. Кубарев. – Москва : КноРус, 2015. – 304 с.

20. Курс физики : учебник для вузов : в 2 томах / под редакцией В. Н. Лозовского. – Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2006. – 2 т.

21. Физика : программа, методические указания по изучению дисциплины по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника» / В. Л. Матухин, Т. А. Серебренникова, О. С. Зуева [и др.]. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2012. – 104 с.

22. Механика и молекулярная физика : сборник задач по курсу «Физика» / В. Л. Матухин, О. С. Зуева, А. И. Килеев [и др.]. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2002. – 66 с.

23. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 3 томах / И. В. Савельев. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 3 т.

24. Оселедчик, Ю. С. Физика. Модульный курс (для технических вузов) : учебное пособие для бакалавров / Ю. С. Оселедчик, П. И. Самойленко, Т. Н. Точилина. – Москва : Юрайт, 2014. – 526 с.

25. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 18-е изд., стер. – Москва : Академия, 2010. – 557 с.

26. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики с решениями / Т. И. Трофимова. – Москва : Высшая школа, 2008. – 592 с.

27. Трофимова, Т. И. Физика : справочник с примерами решения задач / Т. И. Трофимова. – Москва : Юрайт, 2010. – 448 с.

28. Физика : задачник : в 2 частях. Часть 1. Механика. Молекулярная физика. Электростатика. Постоянный ток / составители: Е. Л. Корягина, Е. В. Газеева, С. Ф. Малацион, А. Н. Гавриленко. – Казань : КГЭУ, 2022. – 133 с.

29. Фирсов, А. В. Курс физики: задачи и решения / А. В. Фирсов, Т. И. Трофимова. – Москва : Academia, 2011. – 592 с.

30. Фриш, С. Э. Курс общей физики : учебник : в 3 томах / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – 13-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 3 т.

31. Хавруняк, В. Г. Физика. Лабораторный практикум : учебное пособие / В. Г. Хавруняк. – Москва : Дрофа, 2014. – 144 с.

32. Урядова, Л. Ф. Химия : учебно-практическое пособие / Л. Ф. Урядова, Н. Д. Чичирова. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2001. – 199 с.

33. Элементарный учебник физики : учебное пособие : в 3 томах. Том 2. Электричество и магнетизм / под редакцией Г. С. Ландсберга. – 16-е изд. – Москва : Физматлит, 2015. – 488 с.

34. Яворский, Б. Н. Справочник по физике / Б. Н. Яворский, А. А. Детлаф. – Москва : Наука, 1990. – 624 с.

35. Яворский, Б. Н. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б. Н. Яворский. – Москва : Мир и образование, 2022. – 1056 с.

Приложение А

Международная система единиц

Корректное решение физических задач невозможно без основательного знания единиц физических величин. Различные системы единиц отличаются друг от друга тем, какие единицы приняты за основные.

В настоящее время в научной, а также в учебной литературе обязательна к применению Система интернациональная (СИ), которая строится на семи основных и двух дополнительных единицах (табл. А.1). Для установления производных единиц используют физические законы, связывающие их с основными единицами.

Таблица А.1

Единицы системы СИ

Величина	Единица	
	наименование	обозначение
Основные единицы		
длина	метр	м
масса	килограмм	кг
время	секунда	с
сила электрического тока	ампер	А
термодинамическая температура	кельвин	К
сила света	кандела	кд
количество вещества	моль	моль
Дополнительные единицы		
плоский угол	радиан	рад
телесный угол	стерадиан	ср

Приложение Б

Таблица Б.1

Некоторые часто встречающиеся числа

$\pi = 3{,}141593$ $4\pi = 12{,}5637$ $2/\pi = 0{,}63662$ $\pi^2 = 9{,}86960$	$\sqrt{\pi} = 1{,}77245$ $e = 2{,}71828$ $\sqrt{2} = 1{,}41421$ $\sqrt{3} = 1{,}73205$	$1^\circ = 0{,}01745$ рад $1' = 0{,}00029$ рад $1'' = 0{,}0000048$ рад

Таблица Б.2

Обозначения и названия единиц измерения

Единица измерения	Обозна-чение	Единица измерения	Обозна-чение	Единица измерения	Обозна-чение
ампер	А	дина	дин	радиан	рад
вольт	В	джоуль	Дж	секунда	с
вебер	Вб	кельвин	К	сименс	См
ватт	Вт	кулон	Кл	тесла	Тл
генри	Гн	метр	м	фарад	Ф
грамм	г	минута	мин	час	ч
гаусс	Гс	максвелл	Мкс	эрстед	Э
герц	Гц	ньютон	Н	электронвольт	эВ

Таблица Б.3

Десятичные приставки к названиям единиц

Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
тера	Т	10^{12}	санти	с	10^{-2}
гига	Г	10^{9}	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^{6}	микро	мк	10^{-6}
кило	К	10^{3}	нано	н	10^{-9}
гекто	г	10^{2}	пико	п	10^{-12}
дека	да	10^{1}	фемто	ф	10^{-15}
деци	д	10^{-1}	атто	а	10^{-18}

Таблица Б.4

Основные физические постоянные

Наименование	Значение, единицы измерения
Гравитационная постоянная	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \left(\text{Н} \cdot \text{м}^2\right) / \text{кг}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^8$ м/с
Скорость звука в воздухе при нормальных условиях	$\upsilon_{\text{зв}} = 331,36$ м/с
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ Гн/м
Связь между скоростью света и постоянными ε_0 и μ_0	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31}$ Дж · с
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$\frac{m_p}{m_e} = 1836,15152$
Элементарный заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$\frac{e}{m_e} = 1,7588047 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1,6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея	$F = 96,48456 \cdot 10^3$ Кл/моль
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31441$ Дж/(моль · К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 22,41383 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1,01325 \cdot 10^5$ Па
Ускорение свободного падения	$g = 9,80665$ м/с^2

Таблица Б.5

Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение, ед. измерения
Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^8$ м
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца (астрономическая единица)	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин

Таблица Б.6

Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, $\times 10^3$ (кг/м^3)	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, $\times 10^{-5}$ ($К^{-1}$)
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1 530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	–	1,9
Лед	0,9	0	2 100	335	–
Медь	8,6	1 100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1 770	117	113	0,89
Пробка	0,2	–	2 050	–	–
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1 300	460	–	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

Таблица Б.7

Свойства некоторых жидкостей (при 20 °С)

Вещество	Плотность, $\times 10^3 \left(кг/м^3\right)$	Удельная теплоемкость, $Дж/(кг \cdot К)$	Поверхностное натяжение, $Н/м$
Бензол	0,88	1 720	0,03
Вода	1,00	4 190	0,073
Глицерин	1,20	2 430	0,064
Касторовое масло	0,90	1 800	0,035
Керосин	0,80	2 140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2 510	0,02

Таблица Б.8

Удельная теплота сгорания топлива

Вещество	$q \times 10^6$ (Дж/кг)	Вещество	$q \times 10^6$ (Дж/кг)
Бензин	46,2	Мазут	42
Дрова (сухие)	8,3	Нефть	46,2
Каменный уголь	30	Спирт	30
Керосин	46,2	Торф	15

Таблица Б.9

Постоянные Ван-дер-Ваальса для различных газов

Газ	a, $\frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$	b, $\frac{см^3}{моль}$	Газ	a, $\frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$	b, $\frac{см^3}{моль}$
He	0,0035	23,70	NO	0,1358	27,89
Ne	0,0214	17,09	NO_2	0,5354	44,24
Ar	0,1363	32,19	H_2O	0,5536	30,49
Kr	0,2349	39,78	H_2S	0,4490	42,87
Xe	0,4250	51,05	NH_3	0,4225	37,07
H_2	0,0248	26,61	SO_2	0,6803	56,36
N_2	0,1408	39,13	CH_4	0,2283	42,78
O_2	0,1378	31,83	C_2H_4	0,4530	5,714
Cl_2	0,6579	56,22	C_2H_6	0,5562	63,80
CO	0,1505	39,85	C_3H_8	0,8779	84,45
CO_2	0,3640	42,67	C_6H_6	1,824	115,4

Таблица Б.10

Удельная теплота парообразования и конденсации жидкостей (при температуре кипения и давлении $1{,}013 \cdot 10^5$ Па)

Вещество	L, МДж/кг	Вещество	L, МДж/кг
Вода	2,26	Ртуть	0,3
Спирт	0,85	Керосин	0,21–0,23
Эфир	0,35	Бензин	0,23–0,31

Таблица Б.11

Диэлектрическая проницаемость диэлектриков

Вещество	ε	Вещество	ε
Вода	81	Слюда	7
Керосин	2	Стекло	7
Масло (трансформаторное)	2,2	Фарфор	5
Парафин	2	Эбонит	3

Таблица Б.12

Удельное сопротивление ρ и температурный коэффициент расширения α проводников

Вещество	ρ, Ом · м (при 20 °С)	α, К$^{-1}$
Алюминий	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$	$4{,}9 \cdot 10^{-3}$
Нихром	$110 \cdot 10^{-8}$	$0{,}4 \cdot 10^{-3}$
Железо	$9{,}8 \cdot 10^{-9}$	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$
Медь	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	$5{,}9 \cdot 10^{-3}$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Зуева Ольга Стефановна, **Хуснутдинов** Рустем Рауфович,
Гайсин Азат Фивзатович, **Газеева** Елена Владимировна,
Гарькавый Станислав Олегович, **Зайнашева** Гузель Накиповна,
Зуев Юрий Федорович, **Корягина** Евгения Львовна,
Матухин Вадим Леонидович, **Малацион** Светлана Фиаловна,
Погорельцев Александр Ильич, **Севастьянов** Илья Германович,
Хуснутдинова Наира Рустемовна, **Шмидт** Екатерина Вадимовна

ФИЗИКА

Практикум

В двух частях

Часть 1

Физические основы механики. Молекулярная физика
и термодинамика. Электростатика.
Постоянный электрический ток

Кафедра физики КГЭУ

Редактор *М. С. Беркутова*
Технический редактор *И. В. Краснова*
Компьютерная верстка *И. В. Красновой*

Подписано в печать 27.12.2023.
Формат 60 × 84/16. Усл. печ. л. 14,93. Уч.-изд. л. 7,99.
Заказ № 496/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ.
420066, г. Казань, ул. Красносельская, 51