

## ЗАНЯТИЕ 1.

**Знакомимся с материалом. Переписываем основные формулы. Условие задач записываем в кратком виде и кратко переписываем решение.**

### 1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

#### 1.1. Основные понятия и формулы

Силовое поле, создаваемое постоянными магнитами, проводниками с током и движущимися заряженными частицами, называют магнитным полем. Оно обнаруживается по силовому действию, оказываемому на проводники с током и постоянные магниты, помещенные в это поле. Неподвижные электрические заряды магнитного поля не создают, и постоянное магнитное поле не действует на неподвижные заряды. В качестве основной характеристики магнитного поля вводится вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Принято считать, что вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в любой точке поля совпадает по направлению с силой, действующей на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку.

Для изучения величины магнитного поля в каждой конкретной точке, кроме магнитной стрелки, может использоваться ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре малых размеров. Помещаемый в рассматриваемую точку контур с током разворачивается так, что его положительная нормаль (связанная с направлением тока правилом правого винта) устанавливается подобно магнитной стрелке, т. е. по полю (рис. 1.1).

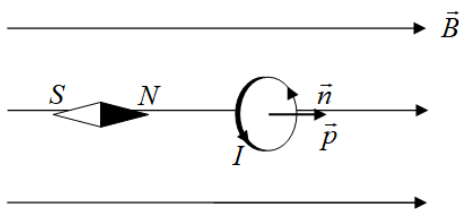


Рис.1.1. Равновесные положения магнитной стрелки и контура с током в магнитном поле

Поскольку ориентирующее действие магнитного поля на полосовой магнетик (магнитную стрелку) и круговой ток малых размеров аналогичны воздействию электрического поля на электрический диполь, магнитную стрелку, так же, как и круговой ток малых размеров, называют магнитным диполем. Дипольный магнитный момент контура с током пропорционален току  $I$ , текущему по контуру площадью  $S$ , а его направление совпадает с направлением положительной нормали  $\vec{n}$  к контуру, а именно

$$\vec{p} = IS\vec{n}.$$

Ориентирующее действие магнитного поля приводит к появлению вращающего момента сил  $\vec{N}$ , заставляющего контур (магнитный диполь) разворачиваться в магнитном поле до некоторого равновесного положения. Вращающий момент, определяемый соотношением

$$\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$$

зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств контура. Он является также функцией угла  $\alpha$  между нормалью  $\vec{n}$  (вектором  $\vec{p}_m$ ) и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , достигая наибольшего значения  $N_{\max}$  при  $\alpha = \pi/2$ . Тем не менее, физическая величина, пропорциональная отношению  $N_{\max}/p_m$ , определяется только свойствами магнитного поля и поэтому может служить его количественной характеристикой. Вводимая таким образом величина

$$B = N_{\max}/p_m$$

называется индукцией магнитного поля.

Вспомогательной величиной, характеризующей магнитное поле, является вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , связанный с вектором магнитной индукции соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Здесь  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды (для вакуума  $\mu = 1$ ). В вакууме и в анизотропных средах направления векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  совпадают.

Для магнитных полей, также, как для электрических, соблюдается принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i, \quad \vec{H} = \sum_i \vec{H}_i,$$

т.е. магнитное поле, порождаемое несколькими источниками, равно векторной сумме полей, создаваемых каждым источником в отдельности.

Для графического изображения магнитных полей пользуются линиями магнитной индукции. Это линии, проведенные так, что вектор  $\vec{B}$  в каждой точке линии направлен по касательной к ней. Вблизи проводника линии магнитной индукции  $\vec{B}$  лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Направление линий магнитной индукции определяется по правилу буравчика: если ввинчивать буравчик по направлению вектора плотности тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление магнитных силовых линий (рис. 1.2). Линии магнитной индукции не могут обрываться ни в каких точках поля: они либо замкнуты, либо идут в бесконечность или из бесконечности.

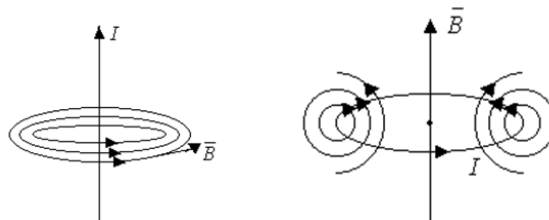


Рис. 1.2. Магнитное поле прямого и кругового тока

Магнитное поле соленоида, как видно из рис. 1.3, подобно полю полосового магнита. Северный полюс магнита соответствует тому концу соленоида, из которого ток в витках изображен идущим против часовой стрелки. Опыты показали, что, разрезав магнит, нельзя получить магнит только с одним полюсом. Каждая часть имеет и южный и северный полюсы. Это свидетельствует о том, что в отличие от электрических зарядов, магнитных зарядов (монополей) не существует. Линии магнитной индукции не обрываются на полюсах, а продолжают внутри магнита.

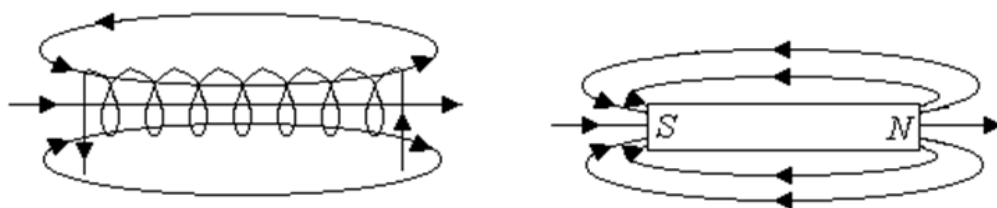


Рис. 1.3. Магнитное поле соленоида и полосового магнита

В общем случае расчет магнитных полей производится с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где  $d\vec{B}$  – магнитная индукция, создаваемая элементом длины  $dl$  проводника с током  $I$ , находящимся на расстоянии  $r$  от рассматриваемой точки. Для простых конфигураций магнитных полей могут быть использованы следующие формулы.

Магнитная индукция и напряженность поля, создаваемые бесконечно длинным прямым проводником с током на расстоянии  $a$  от прямого тока до точки находятся по формулам:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a}, \quad H = \frac{I}{2\pi a}.$$

Для отрезка проводника с током  $I$  в некоторой точке, положение которой задается расстоянием  $a$  до линии тока и углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис.1.4), магнитное поле может быть рассчитано с помощью соотношений

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2);$$

$$H = \frac{I}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

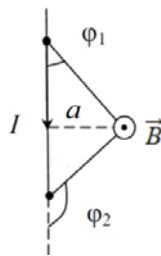


Рис. 1.4. Магнитное поле, создаваемое отрезком с током

Магнитную индукцию и напряженность поля, создаваемые круговым током радиуса  $R$ , в центре кругового тока можно рассчитать, как

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}, \quad H = \frac{I}{2R}$$

В точках, находящихся на оси кругового тока радиуса  $R$  на расстоянии  $a$  от плоскости контура, эти соотношения принимают форму:

$$B = \frac{\mu_0 \mu R^2 I}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}; \quad H = \frac{R^2 I}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Магнитные поля внутри соленоида и тороида можно рассчитать по формулам

$$B = \mu_0 \mu n I = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I, \quad H = n I = \frac{N}{l} I,$$

где  $n = N/l$  – плотность числа витков,  $N$  – полное число витков,  $l$  – длина соленоида или длина окружности тороида.

Для расчета магнитных полей может быть использован закон полного тока для магнитного поля в вакууме,

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

который устанавливает связь между циркуляцией вектора индукции магнитного поля в вакууме вдоль произвольного замкнутого контура и алгебраической суммой токов, охватываемых этим контуром.

## 1.2. Примеры решения задач

**Задача 1-1.** По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток  $I = 2 \text{ А}$ . При этом в центре рамки образуется магнитное поле с индукцией  $B = 4,15 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ . Найти длину  $l$  проволоки, из которой сделана рамка.

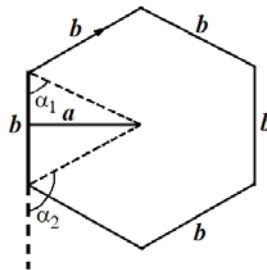


Рис. 1.5. К задаче 1-1

**Решение.** Шестиугольник (рис. 1.5) может быть разбит на 6 прямолинейных проводников длиной  $b = \frac{l}{6}$ . Длина перпендикуляра  $a$ , опущенного из центра на любую из его сторон, может быть рассчитана по теореме Пифагора  $a^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3}{4}b^2$ . Следовательно, через длину проволоки она может быть выражена, как  $a = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{12}$ . Каждый из 6 проводников создает в центре шестиугольника магнитное поле с индукцией:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 120^\circ$ .

Магнитное поле, создаваемое каждой из шести сторон шестиугольника, направлено от нас за чертеж, поэтому результирующий вектор индукции магнитного поля  $B = 6 B_0$  также направлен от нас за чертеж и равен

$$B_0 = \frac{B}{6} = \frac{\mu_0 I \cdot 12}{4\pi l \sqrt{3}} (\cos 60^\circ - \cos 120^\circ).$$

Из этого соотношения может быть найдена искомая величина:

$$l = \frac{\mu_0 I \cdot 12 \cdot 6 \cdot (\cos 60^\circ - \cos 120^\circ)}{4\pi \sqrt{3} B};$$

Численный расчет длины проволоки, из которой сделана рамка, дает величину  $l = 0,2$  м.

**Задача 1-2.** По двум прямолинейным бесконечно длинным проводникам, находящимся в воздухе на расстоянии  $r = 0,7$  м, текут токи  $I_1 = 10$  А и  $I_2 = 4$  А, направленные перпендикулярно плоскости чертежа к нам (рис. 1.6). В какой точке между этими проводниками индукция результирующего магнитного поля этих токов равно нулю?

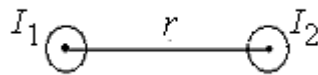


Рис. 1.6. К задаче 1-2

**Решение.** Картина силовых линий, создаваемых токами, изображена на рис. 1.3. Искомое расстояние между точкой  $M$ , в которой индукция суммарного магнитного поля этих токов равна нулю, и проводником  $I_1$  обозначим как  $r_1$ . Ток силой  $I_1$  создает в точке  $M$  магнитное поле, вектор индукции которого  $\vec{B}_1$ , согласно правилу буравчика, направлен вверх. Вектор индукции  $\vec{B}_2$  магнитного поля тока  $I_2$  в той же точке  $M$  направлен вниз.

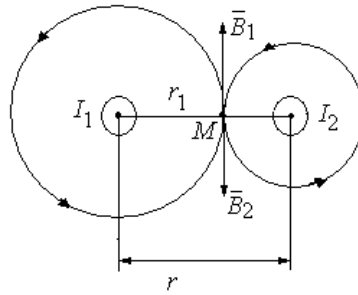


Рис. 1.7. Силовые линии магнитного поля. К задаче 1-2

Так как индукция результирующего магнитного поля в точке  $M$  равна нулю, то векторы  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  антипараллельны и модули их равны. Их значения могут быть найдены по формулам

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{I_1}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \mu_0 \mu \frac{I_2}{2\pi(r - r_1)}.$$

Учитывая, что  $B_1 = B_2$ , имеем

$$\mu_0 \mu \frac{I_1}{2\pi r_1} = \mu_0 \mu \frac{I_2}{2\pi(r - r_1)},$$

откуда соотношение для нахождения искомого расстояния принимает вид

$$r_1 = \frac{I_1 r}{I_1 + I_2}.$$

Подставляя численные значения, находим, что  $r_1 = 0,5$  м.

**Задача 1-3.** Два бесконечно длинных прямых проводника, по которым протекают токи  $I_1 = 6$  и  $I_2 = 8$  А, расположены перпендикулярно друг к другу (рис. 1.8а). Определите индукцию и напряженность магнитного поля в точке  $A$ , расположенной на середине кратчайшего расстояния между проводниками, равного  $d = 2$  см.

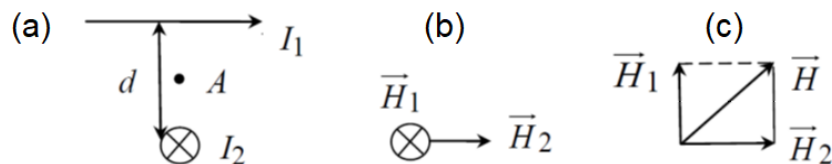


Рис. 1.8. К задаче 1-3

В точке  $A$  направление векторов  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$ , создаваемых рассматриваемыми токами, взаимно перпендикулярны (рис. 1.8b), причем магнитное поле, создаваемое током  $I_1$  направлено от нас. Поэтому получившийся рисунок лучше повернуть на  $90^\circ$  вокруг горизонтальной оси, тогда векторы, создающие магнитное поле окажутся в плоскости рисунка. Из рис. 1.8с видно, что результирующее поле может быть рассчитано по теореме Пифагора.

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2.$$

Напряженность магнитного поля  $H$ , созданного бесконечно длинным проводником с током на расстоянии  $r$  от него, может быть рассчитана с использованием соотношений, в которых учтено, что  $2r = d$ :

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_1}{\pi d}, \quad H_2 = \frac{I_2}{2\pi r} = \frac{I_2}{\pi d}.$$

Применяя теорему Пифагора к расчету результирующего поля, имеем

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{\frac{I_1^2}{(\pi d)^2} + \frac{I_2^2}{(\pi d)^2}} = \frac{1}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 159 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Поскольку индукция  $B$  и напряженность  $H$  связаны соотношением:

$$B = \mu_0 \mu H,$$

Индукция результирующего магнитного поля равна

$$B = 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 159 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

## 2. ЗАКОН АМПЕРА. МАГНИТНЫЙ ПОТОК

### 2.1. Основные понятия и формулы

Потоком вектора магнитной индукции, или магнитным потоком сквозь малую площадку  $dS$ , называется величина, равная произведению площади этой площадки и проекции  $B_n$  вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ :

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n \cdot dS = B \cdot dS \cos(\vec{B}, \vec{n}).$$

Поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную поверхность  $S$  определяется интегралом

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n \cdot dS = \int_S B_n \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) \cdot dS.$$

Если поле однородно, а поверхность  $S$  плоская и расположена перпендикулярно к линиям магнитной индукции, то  $B_n = B = \text{const}$  и  $\Phi_B = BS$ .

В частности, магнитный поток сквозь соленоид (тороид) определяется соотношением

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu N S I}{l},$$

где  $N$  – общее число витков соленоида,  $l$  – его длина,  $S$  – площадь его поперечного сечения. Если соленоид имеет воздушный зазор, то в соотношении необходимо учитывать параметры зазора, и тогда

$$\Phi = \frac{IN}{l_1/(S\mu_0\mu_1) + l_2/(S\mu_0\mu_2)},$$

где  $l_1$  – длина железного сердечника,  $\mu_1$  – его магнитная проницаемость,  $l_2$  – длина воздушного зазора,  $\mu_2$  – магнитная проницаемость воздуха.

Поскольку линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты и не имеют ни начала, ни конца, полный магнитный поток вектора  $\vec{B}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю (теорема Гаусса):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0$$

Эта теорема является математическим следствием отсутствия в природе магнитных зарядов, на которых могли бы начинаться и завершаться линии магнитной индукции.

Электрические токи взаимодействуют между собой посредством магнитного поля. Согласно закону Ампера в однородном магнитном поле сила  $F$ , действующая на проводник с током, пропорциональна силе тока в проводнике  $I$ , длине проводника  $l$ , величине магнитной индукции  $B$  и синусу угла  $\alpha$  между направлением тока и вектором  $\vec{B}$  (в системе СИ):

$$\vec{F} = I[\vec{l} \cdot \vec{B}] \qquad F = I \cdot B \cdot l \sin \alpha$$

Если магнитное поле неоднородно, то необходимо использовать закон Ампера в дифференциальной форме:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}] \quad dF = I \cdot B \cdot dl \sin \alpha ,$$

где  $dF$  – сила, действующая на элемент проводника длиной  $dl$ . Закон Ампера в векторной форме определяет направление силы Ампера, которая расположена перпендикулярно как к вектору  $\vec{B}$ , так и к направлению тока в проводнике. Следует отметить, что силы электромагнитного взаимодействия, как следует из закона Ампера, не являются центральными. Они всегда направлены перпендикулярно как линиям магнитной индукции, так и проводникам с током.

Направление силы, действующей на ток, удобно определить с помощью правила левой руки. Если расположить левую руку так, чтобы вектор  $\vec{B}$  входил в ладонь, а четыре сложенных вместе пальца были направлены вдоль тока, то отставленный в сторону большой палец укажет направление силы.

Закон Ампера позволяет рассчитать силу взаимодействия двух параллельных токов, когда каждый из токов взаимодействует с магнитным полем, создаваемым другим током. Рассчитанная на единицу длины (длину  $l$  участка) проводников, сила взаимодействия двух прямых бесконечно длинных параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящихся на расстоянии  $a$  друг от друга, определяется выражением

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi a}.$$

В случае параллельных сонаправленных токов возникающие силы приводят к притяжению токов, а в случае антипараллельных токов – к их отталкиванию. В более общем случае непараллельных токов возникают силы, стремящиеся развернуть токи таким образом, чтобы они стали параллельными.

Силы Ампера оказывают ориентирующее действие магнитного поля на контур, проявляющееся в том, что рамка разворачивается в магнитном поле таким образом, что ее дипольный магнитный момент

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$$

устанавливается по полю. Это является следствием появления вращательного момента, определяемого соотношением

$$\vec{N} = [(IS\vec{n}) \cdot \vec{B}] = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}].$$

На проводник с током  $I$ , находящийся в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , действуют силы, определяемые законом Ампера. Эти силы приводят к перемещению проводника с током или контура с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника с током и контура с током в магнитном поле определяется соотношением

$$dA = Id\Phi ,$$

где  $d\Phi$  – магнитный поток, пересеченный движущимся проводником (при движении проводника), или изменение магнитного потока сквозь площадь, ограниченную контуром с током при его малом перемещении (при перемещении контура). При конечном перемещении контура с током работа сил Ампера

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока сквозь этот контур.

## 2.2. Примеры решения задач

**Задача 2-1.** По двум тонким проводникам, изогнутым в виде колец, расположенных в параллельных плоскостях друг над другом, текут одинаковые токи. Найти значения этих токов, если радиусы колец  $R = 10$  см, сила взаимодействия колец  $F = 12,56$  мН, а плоскости расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат кольца,  $d = 1$  мм.

**Решение.** Сила взаимодействия двух параллельных токов может быть найдена с помощью соотношения:

$$F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

в котором  $I_1 = I_2 = I$ , а длина провода рассчитывается как длина окружности  
 $l = 2\pi R$ .

С учетом этих соотношений

$$F = \frac{\mu_0 I^2 2\pi R}{2\pi d}$$

Полученное соотношение позволяет рассчитать искомую величину:

$$I = \sqrt{\frac{dF}{\mu_0 R}} = \sqrt{\frac{0,001 \text{ м} \cdot 12,56 \cdot 10^{-3} \text{ Н}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 0,1 \text{ м}}} = 10 \text{ А.}$$

**Задача 2-2.** Кольцо радиусом  $R=10$  см находится в однородном магнитном поле напряженностью  $H=1000$  А/м. Плоскость кольца составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с линиями напряженности. Вычислить величину магнитного потока, пронизывающего кольцо.

**Решение:** Магнитный поток, пронизывающий рассматриваемый круговой контур, определяется соотношением:

$$\Phi = B S \cos\alpha.$$

Здесь  $S$  – площадь кольца, которая может быть найдена по формуле

$$S = \pi R^2,$$

$B$  – индукция магнитного поля в месте его расположения. В вакууме индукция магнитного поля связана с его напряженностью соотношением

$$B = \mu_0 H,$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная вакуума.

Соответственно, формула для нахождения магнитного потока, пронизывающего рассматриваемый круговой контур, может быть записана в виде

$$\Phi = \mu_0 H \cdot \pi R^2 \cdot \cos\alpha.$$

Численное значение магнитного потока равно  $\Phi = 2,29 \cdot 10^{-5}$  Вб.

**Задача 2-3.** Рамка с диаметром  $d = 6$  см содержит  $N = 1000$  витков. Плоскость витков совпадает с направлением однородного магнитного поля, напряженность которого равна  $H = 1500$  А/м. Какой вращающий момент действует на рамку при токе в ней  $I = 10$  А?

**Решение.** На контур с током, находящийся в магнитном поле  $B$ , действуют силы, создающие вращающий момент:

$$M = p B \sin\alpha,$$

где  $p$  – магнитный момент контура с током,  $\alpha$  – угол между направлением поля и нормалью к плоскости контура, в данной задаче равный  $\pi/2$ . Магнитный момент контура с током определяется произведением тока, текущего по контуру, на площадь контура и зависит от числа витков в контуре

$$p = N \cdot I \cdot S = N \cdot I \cdot \pi R^2,$$

поэтому окончательное выражение для нахождения искомого вращающего момента примет вид

$$M = \mu_0 \pi I H N \cdot R^2 \sin\alpha = 0,053 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

### 3. СИЛА ЛОРЕНЦА. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

#### 3.1. Основные понятия и формулы

Проводник, по которому течет ток, отличается от проводника без тока лишь тем, что в нем происходит упорядоченное движение носителей заряда. Следовательно, сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, обусловлена действием сил на отдельные движущиеся заряды, а уже от этих зарядов действие передается проводнику, по которому они перемещаются. Этот вывод подтверждается целым рядом опытных фактов,



и, в частности, тем, что пучок свободно летящих заряженных частиц (например, электронный пучок), отклоняется магнитным полем. Итак, сила Ампера, действующая на ток в магнитном поле

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$$

есть результат действия магнитного поля на все движущиеся заряженные частицы, образующие электрический ток. Выражение для силы Лоренца, действующей на отдельный заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , имеет вид

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \cdot \vec{B}], \quad F_L = qvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между направлением скорости и вектором индукции магнитного поля. Направлена сила Лоренца перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Следует отметить, что в соотношении для силы Лоренца  $q$  – алгебраическая величина заряда, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Если заряд  $q > 0$ , направление действующей на него силы совпадает с направлением вектора  $[\vec{v}\vec{B}]$  и может быть найдено по правилу левой руки: если четыре пальца левой руки направлены вдоль вектора скорости, а силовые линии магнитного поля входят в ладонь, то отведенный на  $90^\circ$  большой палец покажет направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд. В случае отрицательного заряда направление силы противоположно  $[\vec{v}\vec{B}]$ , т.е. на отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении.

Следует отметить, что магнитное поле на покоящийся электрический заряд (т.е. при  $\vec{v} = 0$ ) не действует. В этом состоит существенное отличие магнитного поля от электрического. Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды. Причем, если заряд движется вдоль линий магнитной индукции  $\vec{B}$ , т.е.  $\alpha = 0$ , он также не испытывает действия силы.

Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости заряженной частицы, поэтому она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу магнитным полем, нельзя изменить ее кинетическую энергию. Поэтому при наличии силы Лоренца величина скорости частицы остается постоянной, однако траектория частицы искривляется.

В общем случае, на движущийся заряд помимо магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  может действовать еще и электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ . Тогда результирующая сила, действующая на заряд, определяется векторной суммой сил

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

В этом соотношении скорость  $\vec{v}$  – это скорость заряженной частицы относительно магнитного поля.

При движении заряженной частицы в магнитном поле возможны следующие варианты:

а) Частица влетает в поле вдоль линий магнитной индукции, т.е. угол  $\alpha$  равен 0 или  $\pi$ . Тогда  $F_L = qvB \sin \alpha = 0$  и частица будет двигаться с той же скоростью равномерно и прямолинейно.

б) Частица влетает в поле перпендикулярно вектору  $\vec{B}$ , т.е.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Тогда  $F_L = qvB$  постоянна по модулю и перпендикулярна траектории частицы. В этом случае сила Лоренца будет сообщать частице центростремительное ускорение  $v^2/R$ , заставляющее частицу двигаться по окружности радиуса  $R$ :

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Период вращения частицы по окружности определяется только величиной магнитного поля и удельным зарядом частицы  $q/m$ :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Этот факт используется в циклических ускорителях заряженных частиц.

в) Частица влетает под произвольным углом  $\alpha$  к вектору  $\vec{B}$ . В этом случае движение частицы можно представить в виде двух независимых движений: равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $v \cos \alpha$  и равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю, со скоростью  $v \sin \alpha$ .

В результате наложения обоих независимых движений возникает движение по винтовой линии, характеризуемой радиусом  $R$  и шагом  $h$ :

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, \quad h = \frac{2\pi v \cos \alpha}{qB}.$$

Искривлением траектории движения заряженных частиц в магнитном поле под действием силы Лоренца объясняется эффект Холла (гальваномагнитное явление). Эффект Холла заключается в возникновении поперечного электрического поля в проводнике или в полупроводнике с током, помещенным в магнитное поле. Было установлено, что дополнительная поперечная разность потенциалов, возникающая в эффекте Холла,

$$\Delta\varphi = \frac{RIB}{d},$$

зависит от величины индукции магнитного поля  $B$ , силы тока  $I$  и толщины пластинки  $d$ . Коэффициент пропорциональности – постоянная Холла

$$R = \frac{1}{en}$$

позволяет определить концентрацию зарядов  $n$  в проводнике и их знак, т.к. знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда носителей тока. В случае электронной проводимости ( $n$ -типа) постоянная  $R < 0$ , а в случае дырочной проводимости ( $p$ -типа) постоянная  $R > 0$ . Измерение постоянной Холла также можно использовать для нахождения величины индукции магнитного поля.

### 3.2. Примеры решения задач

**Задача 3-1.** Электрон, имеющий скорость  $v = 2 \cdot 10^6$  м/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 30$  мТл под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению линий индукции магнитного поля. Определить радиус  $R$  и шаг  $h$  винтовой линии, по которой будет двигаться электрон (рис. 3.1).

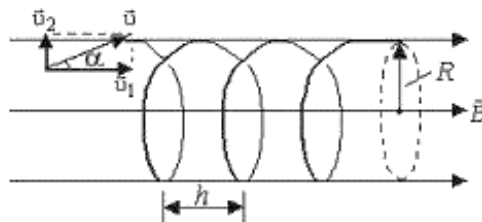


Рис. 3.1. К задаче 3-1

**Решение.** На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \cdot \vec{B}],$$

перпендикулярная векторам магнитной индукции  $\vec{B}$  и скорости  $\vec{v}$  электрона.

Для описания траектории электрона удобно представить вектор скорости  $\vec{v}$  как сумму двух составляющих, одна из которых  $\vec{v}_1$  направлена по линиям индукции, вторая,  $\vec{v}_2$  – перпендикулярно им. Тогда выражение для силы Лоренца может быть упрощено

$$\vec{F}_L = e[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\vec{B}] = e[\vec{v}_2\vec{B}],$$

поскольку первое слагаемое векторного произведения  $[\vec{v}_1\vec{B}] = 0$  за счет того, что векторы  $\vec{v}_1$  и  $\vec{B}$  сонаправлены. Во время движения составляющая скорости  $\vec{v}_1$  не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Наоборот, составляющая скорости  $\vec{v}_2$  под действием силы Лоренца непрерывно изменяет свое направление, так как сила  $\vec{F}_L$ , расположенная в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, сообщает электрону нормальное ускорение. Таким образом, электрон участвует в двух движениях: равномерном и прямолинейном со скоростью  $v_1$  параллельно линиям индукции и криволинейном с постоянной по модулю скоростью  $v_2$  в плоскости, перпендикулярной линиям индукции. В результате одновременного участия в движениях по прямой и по окружности электрон будет двигаться по винтовой линии.

Составляющие скорости  $v$ , как видно из рис. 3.1, находятся, как:

$$v_1 = v \cdot \cos \alpha, \quad v_2 = v \cdot \sin \alpha.$$

Учитывая, что вектор скорости  $\vec{v}_2$  перпендикулярен вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  и  $v_2 = v \cdot \sin \alpha$ , нормальное ускорение, сообщенное электрону силой Лоренца, рассчитывается по формуле

$$a_n = v_2^2 / R = v^2 \sin^2 \alpha / R,$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории.

С учетом этих выражений, второй закон Ньютона для движущегося электрона

$$m_e a_n = F_L$$

примет вид

$$m_e v^2 \cdot \sin^2 \alpha / R = e v B \sin \alpha.$$

Это соотношение позволяет определить радиус винтовой линии, по которой движется электрон

$$R = m_e v \cdot \sin \alpha / (eB).$$

Шаг винтовой линии определяется как смещение по горизонтали (происходящее со скоростью  $v_1$ ) за время  $T$  одного оборота

$$h = v_1 T = v \cos \alpha \cdot T.$$

За время одного оборота электрон проходит один полный круг (со скоростью  $v_2$ ), а поскольку длина окружности равна  $2\pi R$ , время одного оборота определится, как

$$T = 2\pi R / v_2 = 2\pi R / (v \sin \alpha) = 2\pi m_e / (eB).$$

Соответственно, шаг винтовой линии рассчитывается по формуле

$$h = v \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi m_e / (eB).$$

Выполнив вычисления, для искомых величин получим

$$R = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,19 \text{ мм}; \quad h = 20,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,06 \text{ мм}.$$

**Задача 3-2.** Найдите кинетическую энергию протона, движущегося по дуге окружности радиусом  $R = 60$  см в магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл. Выразите ее в электрон-вольтах.

**Решение.** Радиус траектории протона, являющегося элементарной частицей с известной массой  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг и зарядом  $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, зависит от величины магнитного поля и от скорости протона:

$$R = \frac{m_p v}{q_p B}.$$

Это соотношение позволяет рассчитать скорость движущегося протона

$$v = \frac{R q_p B}{m_p}$$

и определить его кинетическую энергию

$$E_k = \frac{m_p v^2}{2} = \frac{m_p \cdot R^2 q_p^2 \cdot B^2}{2m_p^2} = 0,276 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}.$$

Учитывая, что  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , кинетическую энергию протона можно пересчитать в электрон-вольтах:

$$E_k = 0,276 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 17,2 \text{ МэВ}.$$

**Задача 3-3.** Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $U = 6 \text{ кВ}$ , влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 13 \text{ мТл}$  под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению поля. Найдите радиус  $R$  и шаг  $h$  винтовой траектории.

**Решение.** Пройдя ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi = U$ , электрон, имеющий нулевую начальную скорость, приобретает кинетическую энергию. Ее можно рассчитать, приравняв изменение кинетической энергии  $\Delta E_k = E_k$  работе  $A = e \cdot \Delta\phi = eU$  сил электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Полученное соотношение дает возможность определить скорость электрона, как

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Рассчитанное значение скорости электрона позволяет по известным формулам (см. решение задачи 3-1) найти радиус  $R$  и шаг  $h$  его винтовой траектории.

$$R = \frac{\sin \alpha}{B} \cdot \sqrt{\frac{2Um}{e}} = \frac{0,5}{0,013} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}} = 0,01 \text{ м},$$

$$h = \frac{2\pi \cos \alpha}{B} \cdot \sqrt{\frac{2Um}{e}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,87}{0,013 \text{ Тл}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}} = 0,11 \text{ м}.$$

## 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 4.1. Основные понятия и формулы

Движение электрона в атоме подчиняется квантовым законам. Тем не менее, для объяснения некоторых процессов, происходящих при внесении веществ в магнитное поле, с успехом могут быть использованы классические представления о строении атомов. Согласно этим представлениям, электроны в атоме движутся по стационарным замкнутым траекториям – орбитам, поэтому каждый атом или молекулу можно рассматривать как совокупность электронных микротоков. Вследствие этого даже в отсутствие внешнего магнитного поля атомы обладают магнитным моментом, связанным с орбитальным движением электронов, т.е. ведут себя как магнитные диполи.

Электрон, движущийся со скоростью  $\vec{v}$  по одной из таких орбит радиусом  $r$ , эквивалентен круговому контуру с током и может быть охарактеризован орбитальным

магнитным моментом электрона  $p_{ml} = IS = I\pi r^2$ . Вектор  $\vec{p}_{ml}$  направлен перпендикулярно плоскости орбиты в соответствии с правилом правого винта по отношению к току. Поскольку за время обращения электрона  $T$  вокруг ядра переносится в единицу времени заряд  $q = -e$ , сила тока может быть рассчитана, как  $I = e/T = e\nu/2\pi r$ .

Итак, движением электрона как заряженной частицы определяется орбитальный магнитный момент  $p_{ml}$ , а его механическим движением по орбите – орбитальный механический момент импульса  $L_l$ :

$$p_{ml} = \frac{e\nu r}{2}, \quad L_l = m\nu r.$$

Так как электрон несет отрицательный заряд, эти моменты направлены в противоположные стороны.

Отношение орбитальных магнитного и механического моментов определяется только универсальными постоянными и поэтому одинаково для всех орбит

$$\frac{p_{ml}}{L_l} = -\frac{e}{2m} = -g_l \frac{e}{2m},$$

причем для орбитального движения  $g_l = 1$ . Пропорциональность магнитного и механического моментов лежит в основе так называемых магнитомеханических явлений, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение.

Наряду с орбитальными магнитным  $\vec{p}_{ml}$  и механическим моментом  $\vec{L}_l$  электроны обладают также собственными (спиновыми) моментами  $\vec{p}_{ms}$  и  $\vec{L}_s$ , для которых  $g_s = 2$ :

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m} = -g_s \frac{e}{2m}$$

Общий магнитный момент атома  $\vec{p}_m$  равен векторной сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов входящих в атом электронов. В зависимости от величины суммарного магнитного дипольного момента и особенностей атомного строения все вещества по магнитным свойствам подразделяются на три группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

Намагниченность магнетика  $\vec{J}$  характеризуют магнитным моментом единицы объема образца, равным векторной сумме магнитных моментов всех находящихся там молекул:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m.$$

Намагничивание магнетика появляется при внесении образца во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ . Однако, поле  $\vec{B}$  внутри магнетика

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

отличается от поля  $\vec{B}_0$  из-за появления дополнительного поля  $\vec{B}'$ , создаваемого внутренними молекулярными микротоками. Намагничивание вещества обуславливается именно суммарным действием обоих полей. Для устранения зависимости от внутренних микротоков наряду с магнитной индукцией  $\vec{B}$  вводится вспомогательная величина – вектор напряженности магнитного поля, определяемый соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная. Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  определяется внешними условиями и не зависит от вида магнетика. Закон полного тока для вектора  $\vec{H}$  имеет простой вид и не содержит микроскопических токов:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I_{\text{макро}}.$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура определяется алгебраической суммой макроскопических токов, охватываемых этим контуром.

Опыт показывает, что для большинства веществ намагниченность пропорциональна приложенному полю:

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

Здесь  $\chi$  – характерная для каждого магнетика величина, называемая магнитной восприимчивостью. Поскольку размерность  $H$  совпадает с размерностью  $J$  (А/м), магнитная восприимчивость  $\chi$  – безразмерная величина. С учетом последнего соотношения имеем

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}, \quad \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}.$$

Безразмерная величина  $\mu = 1 + \chi$  называется относительной магнитной проницаемостью вещества. Поскольку восприимчивость  $\chi$  может быть как положительной, так и отрицательной, то магнитная проницаемость  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы. Относительная магнитная проницаемость  $\mu$  показывает, во сколько раз усиливается (или ослабевает) поле в магнетике по сравнению с полем в вакууме.

В диамагнетиках собственное магнитное поле  $\vec{B}'$ , индуцируемое внешним полем  $\vec{B}_0$ , направлено противоположно внешнему полю. Поэтому результирующее поле в диамагнетике ослабляется. Это означает, что восприимчивость диамагнетиков  $\chi < 0$ , т.е. магнитная проницаемость  $\mu < 1$ .

Магнитная восприимчивость парамагнетиков невелика и положительна. Поэтому относительная магнитная проницаемость  $\mu > 1$ . Диамагнитный и парамагнитный эффекты достаточно слабы. Для парамагнетиков и диамагнетиков  $|\chi| \sim 10^{-5} - 10^{-3}$  и поэтому можно считать  $\mu \approx 1$ .

Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать спонтанной намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Магнитная восприимчивость ферромагнетиков положительна и весьма велика. Ее значения могут достигать до  $10^5$ . Существенной особенностью ферромагнетиков является наличие зависимости относительной магнитной проницаемости  $\mu$  от величины напряженности  $H$  приложенного магнитного поля. Вначале  $\mu$  быстро растет, достигает максимального значения, а затем убывает. Особые свойства ферромагнетиков объясняются наличием в них малых областей, обладающих однородной самопроизвольной намагниченностью. Такие области называются доменами. Линейные размеры доменов составляют  $10^{-2} - 10^{-3}$  см. Внешнее магнитное поле в ферромагнетике ориентирует моменты не отдельных частиц, а целых областей – доменов. Это приводит к появлению магнитного гистерезиса, т.е. к зависимости вектора намагниченности  $\vec{J}$  и вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в веществе не только от напряженности  $\vec{H}$  приложенного внешнего поля, но и от предыстории образца.

Следует помнить, что магнитная проницаемость вещества  $\mu$  у ферромагнетиков не является константой, а зависит от величины напряженности поля (рис. 4.1). Поэтому для

определения  $B$  в ферромагнетике надо знать либо зависимость  $\mu(H)$ , либо зависимость  $B(H)$ .

Возможные зависимости индукции  $B$  от напряженности  $H$  магнитного поля для некоторых видов ферромагнитных материалов приведены в таблице 8 Приложения. Знание хода петли гистерезиса и ее характерных точек является важным в технических приложениях ферромагнетизма. Особое внимание следует уделить доменной структуре ферромагнетиков и объяснению петли гистерезиса с точки зрения доменной теории.

#### 4.2. Примеры решения задач

**Задача 4-1.** Обмотка тонкой тороидальной катушки с железным сердечником содержит  $N = 800$  витков. Средний радиус тороида равен  $R = 15$  см. Определить напряженность поля  $H$  и магнитную индукцию  $B$  внутри сердечника, относительную магнитную проницаемость  $\mu$  железа и намагниченность  $J$  сердечника при двух значениях силы тока в обмотке: 1)  $I_1 = 0,6$  А; 2)  $I_2 = 1,8$  А.

**Решение.** При протекании тока по обмотке соленоида в железном сердечнике тороида возникнет магнитное поле, замкнутые линии индукции и напряженности которого имеют форму окружностей, концентричных самому тору. Магнитная индукция этого поля создается как макротоками, текущими по обмотке, так и микротоками, возникающими в материале сердечника. При нахождении магнитного поля в веществе удобнее сначала искать напряженность магнитного поля, поскольку ее величина не только не зависит от материала сердечника, но и в отсутствие сердечника будет такой же, как и с сердечником. Для нахождения напряженности магнитного поля внутри тороида можно применить закон полного тока для магнитного поля в веществе:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

где  $\sum I = N \cdot I$  – алгебраическая сумма макротоков, сцепленных с контуром интегрирования  $L$ . Контур  $L$  выбирается совпадающим с одной из линий напряженности, например, со средней линией тороида. Так как тор тонкий, то можно приближенно считать, что в любом его поперечном сечении и во всех точках внутри тора  $H = \text{const}$ . В этом случае закон полного тока для магнитного поля в веществе можно записать в виде

$$H \cdot 2\pi \cdot R = N \cdot I,$$

а значит, для нахождения напряженности магнитного поля внутри тороида можно воспользоваться соотношением

$$H = N \cdot I / (2\pi \cdot R).$$

Численный расчет с использованием данных задачи дает следующие величины:

$$\text{при } I = I_1 = 0,2 \text{ А} \quad H_1 = NI_1 / (2\pi R) = 1019 \text{ А/м},$$

$$\text{при } I = I_2 = 0,6 \text{ А} \quad H_2 = NI_2 / (2\pi R) = 3057 \text{ А/м}.$$

Индукция магнитного поля внутри тороида может быть найдена по графику зависимости  $B$  от  $H$  основной кривой намагничивания железа (см. таблицу 8 Приложения):

$$\text{при } H = H_1 \quad B_1 = 1,3 \text{ Тл};$$

$$\text{при } H = H_2 \quad B_2 = 1,7 \text{ Тл}.$$

Следует отметить, что для железа и других ферромагнетиков расчетной формулы для определения индукции магнитного поля в сердечнике не существует, поскольку соотношение

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

обычно применяемое для неферромагнитных сред, в данном случае не может быть использовано из-за нелинейной зависимости относительной магнитной проницаемости  $\mu$  от величины приложенного поля. Тем не менее, из этого соотношения могут быть найдены значения  $\mu$ , соответствующие указанным рабочим режимам, а именно:

$$\mu_1 = B_1 / (\mu_0 H_1) = 1016, \quad \mu_2 = B_2 / (\mu_0 H_2) = 443.$$

Намагниченность сердечника  $J$  может быть найдена из соотношения

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}.$$

Численный расчет дает следующие величины намагниченности сердечника:

$$J_1 = B_1 / \mu_0 - H_1 = 1,03 \cdot 10^6 \text{ А/м}; \quad J_2 = B_2 / \mu_0 - H_2 = 1,35 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Следует отметить, что в отличие от напряженности поля, которая прямо пропорциональна силе тока в обмотке, индукция магнитного поля внутри железного сердечника и его намагниченность току не пропорциональны.

**Задача 4-2.** В железном сердечнике соленоида, содержащего 10 витков на 1 см длины, индукция магнитного поля равна 1,3 Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы магнитная индукция в сердечнике осталась неизменной.

**Решение.** Ток  $I$ , текущий по обмотке соленоида, создает внутри соленоида магнитное поле, напряженность которого

$$H = I \cdot n$$

не зависит от материала сердечника, а зависит только от величины тока  $I$ , протекающего по обмотке и такого параметра обмотки, как число витков  $n$  на единицу длины, в нашем случае равного  $n = 10 \text{ см}^{-1} = 1000 \text{ м}^{-1}$ .

С другой стороны, существует еще одна характеристика магнитного поля – индукция магнитного поля. Она связана с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Однако для ферромагнетиков, к которым относятся и железо, и сталь, это соотношение использовать не очень удобно, поскольку относительная магнитная проницаемость  $\mu$  зависит от величины напряженности поля. В случае ферромагнетиков для нахождения связи между  $B$  и  $H$  чаще используют график зависимости  $B$  от  $H$  основной кривой намагничивания железа, приведенный в приложении Б.8. Используя указанный график найдем, что магнитной индукции  $B = 1,3 \text{ Тл}$  в железе примерно соответствует напряженность магнитного поля  $H = 1000 \text{ А/м}$ . Для создания такого поля необходим ток

$$I = H/n = 1 \text{ А}.$$

Из этого же графика видно, что для того, чтобы создать такую же индукцию магнитного поля  $B = 1,3 \text{ Тл}$  в стали, необходимо создать магнитное поле с другой напряженностью  $H_c = 2000 \text{ А/м}$ . Это поле должно быть создано другим током, а именно  $I_c = H_c / n = 2 \text{ А}$ . Соответственно, для того, чтобы индукция магнитного поля в сердечнике осталась неизменной следует увеличить силу тока в обмотке соленоида в 2 раза, поскольку

$$I_c / I = 2.$$