**ЗАНЯТИЕ 4.**

**Знакомимся с материалом. Переписываем основные формулы. Условие задач записываем в кратком виде и кратко переписываем решение.**

# 13. ДВОЙСТВЕННАЯ КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА И МИКРООБЪЕКТОВ

## 13.1. Основные понятия и формулы

С точки зрения волновых представлений свет представляет собой электромагнитную волну. Такие явления, как интерференция и дифракция света, могут быть объяснены только на основе волновых представлений. С другой стороны, существуют убедительные доказательства справедливости квантовых (корпускулярных) представлений о природе света. Распределение энергии в спектре равновесного теплового излучения объясняется на основе предположения об испускании света в виде квантов с энергией $\hbar\omega$. Для объяснения фотоэффекта достаточно предположить, что поглощение света также квантовано. Эйнштейн выдвинул гипотезу, что свет и распространяется в виде дискретных частиц – фотонов.

В настоящее время считается, что свойства непрерывности, характерные для электромагнитного поля световой волны, не исключают свойств дискретности, характерных для световых квантов – фотонов. Свет одновременно обладает свойствами непрерывных электромагнитных волн, характеризующихся определенной частотой и длиной волны, и свойствами дискретных фотонов, обладающих энергией, массой и импульсом. Однако в проявлении этих противоположных свойств имеется вполне определенная закономерность. С уменьшением длины волны (увеличением частоты) все более отчетливо проявляются квантовые свойства света. У длинноволнового излучения основную роль играют его волновые свойства. Наоборот, волновые свойства коротковолнового излучения проявляются весьма слабо. Взаимосвязь между двойственными корпускулярно-волновыми свойствами света можно объяснить, если использовать статистический подход к рассмотрению закономерностей распространения света: квадрат амплитуды световой волны в данной точке пространства является мерой вероятности попадания фотонов в данную точку.

Фотон обладает энергией, массой и импульсом. Энергия фотона определяется его частотой:

$$E = \hbar\omega = h\nu .$$

Масса фотона находится из закона взаимосвязи массы и энергии:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} .$$

Однако масса фотона существенно отличается от массы микроскопических тел и масс других элементарных частиц. Его масса покоя $m_0$ равна нулю. Действительно, релятивистская масса определяется соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} .$$

Для фотона, движущегося в вакууме со скоростью $\upsilon = c$, знаменатель обращается в нуль, а масса $m$ при $m_0 \neq 0$ – в бесконечность. Таким образом, для фотона $m_0 = 0$, т.е. покоящихся фотонов не существует. Очевидно, что фотон всегда движется со скоростью $\upsilon = c$, так как при $\upsilon \neq c$ масса и энергия фотона были бы равны нулю, что противоречит формуле $m = \hbar\omega / c^2$.

Импульс фотона может быть получен из общей формулы теории относительности

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к (E_к + 2m_0c^2)}$$

С учетом соотношения $m_0 = 0$, импульс фотона может быть рассчитан, как

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = mc\,.$$

Если ввести волновой вектор $\vec{k}$, модуль которого равен $k = 2\pi/\lambda$, а направление совпадает с направлением распространения света, то выражение для импульса может быть переписано в векторной форме:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}\,.$$

Итак, три корпускулярные характеристики фотона (энергия, масса и импульс) связаны с волновой характеристикой света – его частотой.

Луи де Бройль выдвинул гипотезу об универсальности корпускулярно-волнового дуализма свойств веществ, предположив, что установленная ранее для квантов света – фотонов корпускулярно-волновая (квантовая) природа присуща всем частицам вещества, обладающих импульсом, – электронам, протонам, атомам и т.д., причем количественные соотношения между волновыми и корпускулярными характеристиками свободных частиц остаются такими же, как и для фотонов.

Согласно де Бройлю с каждым микрообъектом связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики – энергия *E,* масса *m* и импульс $\vec{p}$, с другой стороны – волновые характеристики – частота *ν* и длина волны λ. Связь между ними такая же, как и для фотонов

$$E = h\nu = \hbar\omega, \qquad p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}\,.$$

Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волновой процесс с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon}\,.$$

Поскольку скорости микрочастиц в нерелятивистской области обычно рассчитывают через их кинетическую энергию $E_{\text{к}} = m\upsilon^2/2$, длину волны, сопоставляемую движущимся частицам, иногда рассчитывают, как

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{к}}}}\,.$$

Для релятивистских частиц необходимо использовать соотношения:

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{h\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{m\upsilon}, \qquad p = \frac{1}{c}\sqrt{E_{\text{К}}(E_{\text{К}} + 2m_0c^2)}\,.$$

Волны, ассоциированные со свободно движущимися частицами, получили название волн де Бройля. В настоящее время считается, что всем микрообъектам присущи и корпускулярные, и волновые свойства; в то же время любую из микрочастиц нельзя считать ни частицей, ни волной в классическом понимании. Согласно современной трактовке корпускулярно-волнового дуализма у микрообъекта существует потенциальная возможность проявлять себя, в зависимости от внешних условий, либо как волна, либо как частица. У макроскопических тел волновые свойства не проявляются, так как масса их значительна и величина длины волны де Бройля λ пренебрежимо мала.

Волны де Бройля отражают корпускулярно-волновую (квантовую) природу микрочастиц и интерпретируются как волны, задающие статистические закономерности и вероятностный характер проявления дуализма свойств веществ. Волны де Бройля имеют специфическую (не электромагнитную) природу, не имеющую аналогии среди волн, изучаемых в классической физике: Квадрат модуля амплитуды волны де Бройля является мерой вероятности того, что частица будет обнаружена в этой точке.

### 13.2. Примеры решения задач

**Задача 13–1.** Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 10$ В.

**Решение**. Импульс фотона определяется соотношением

$$p_{ф} = m_{ф}c = \frac{h\nu}{c^2}c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов, приобретает кинетическую энергию

$$E_{к} = \frac{p^2}{2m} = eU.$$

Это соотношение позволяет найти импульс электрона

$$p_e = \sqrt{2m_e eU}.$$

Сравнивая эти импульсы между собой, получаем соотношение, содержащее искомую величину:

$$\frac{h}{\lambda} = \sqrt{2m_e eU}.$$

Учтя, что масса электрона равна $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, а его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, искомую длину волны можно определить по формуле

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}.$$

Расчет ее численного значения дает следующую величину

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 388 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 388 \text{ нм}.$$

**Задача 13–2.** Найдите длину волны де Бройля $\lambda$ для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) $E_{к1}$ = 100 эВ, 2) $E_{к2}$ = 3 МэВ.

**Решение**. Электрон, обладающий большой кинетической энергией, может иметь скорость, сопоставимую со скоростью света. Для определения того, является или нет электрон релятивистской частицей, необходимо сравнить энергию движущегося электрона с энергией покоящегося:

$$E_0 = m_0 c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 81{,}9 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 0{,}512 \text{ МэВ}$$

1) В первом случае $E_{к1}$ = 100 эВ << 512000 эВ т.е. в данном случае электрон является классической частицей, поэтому его импульс может быть рассчитан по формуле

$$p = \sqrt{2mW_{К}}.$$

Из формулы де Бройля следует, что длина волны де Бройля $\lambda$ для электрона, обладающего кинетической энергией $E_{к1}$ = 100 эВ, равна

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mE_{к}}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 1{,}23 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 1{,}23 \text{ Å}.$$

2) Во втором случае $E_{к2}$ = 3 МэВ > 0,512 МэВ, поэтому здесь электрон следует считать релятивистской частицей, т.е. его импульс необходимо рассчитывать по формуле

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_{К}(W_{К} + 2m_0 c^2)}.$$

Таким образом, длина волны де Бройля $\lambda$ для электрона, обладающего кинетической энергией $E_{к2}$ = 3 МэВ, находится, как

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к}(E_{к} + 2m_0 c^2)}}.$$

Ее численное значение оказалось равным

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{\sqrt{3\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}(3\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}+2\cdot 0{,}512\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19})}} = 0{,}62\cdot 10^{-10}\text{ м} = 0{,}62\text{ Å}.$$

Итак, увеличение энергии электрона в 30000 раз привело только к двукратному увеличению его длины волны.

**Задача 13–3**. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1{,}282$ пм. Принимая заряд этой частицы по модулю равным заряду электрона, определите ее массу.

**Решение**. Частица с зарядом $e$, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U$, получает кинетическую энергию $E_к = eU$. Поскольку кинетическая энергия связана с импульсом соотношением

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

приравнивая эти две формулы, получаем

$$p = \sqrt{2meU}.$$

Соответственно, длина волны де Бройля связана с импульсом соотношением

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}},$$

позволяющим рассчитать массу частицы, как

$$m = \frac{h^2}{2e\lambda^2 U} = \frac{6{,}62^2\cdot 10^{-68}}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}282^2\cdot 10^{-24}\cdot 500} = 1{,}67\cdot 10^{-27}\text{ кг}.$$

Полученное значение позволяет предположить, что это протон.

**Задача 13–4**. Найдите длину волны де Бройля для: а) электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с, б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью, соответствующей температуре $T = 300$ К, в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $\upsilon = 1$ см/с.

**Решение**. а) Для электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с, скорость и масса известны ($m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг), поэтому длину волны де Бройля можно определить с помощью соотношения

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_e\upsilon} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{6}} = 0{,}73\cdot 10^{-9}\text{ м}.$$

б) Среднюю квадратичную скорость и массу атома водорода можно определить, как:

$$\bar{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \qquad m = \frac{\mu}{N_A}.$$

Соответственно, для расчета длины волны де Бройля атома водорода, движущегося с заданной средней квадратичной скоростью, используем соотношение

$$\lambda_2 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{hN_A}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} = \frac{hN_A}{\sqrt{3\mu RT}} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{\sqrt{3\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 300}} 14{,}6\cdot 10^{-11}\text{ м}\cdot$$

в) Длину волны де Бройля шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $\upsilon = 1$ см/с, можно непосредственно определить с помощью соотношения

$$\lambda_3 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{10^{-3}\cdot 10^{-2}} = 6{,}62\cdot 10^{-29}\text{ м}.$$

Отметим, что столь малый размер длины волны не позволяет обнаружить у шарика волновые свойства.

## 15. Элементы физики водородоподобного атома

### 15.1. Основные понятия и формулы

В основе **полуклассической модели атома Бора** лежит планетарная модель атома Резерфорда, согласно которой вокруг положительно заряженного ядра по круговым орбитам движутся отрицательно заряженные электроны, притягивающиеся к ядру за счет кулоновской силы притяжения. Тем не менее, анализ опытных фактов заставил Бора отказаться от многих представлений классической физики и сформулировать постулаты, на которых базируется модель атома:

1. **Постулат стационарных состояний**: атом может находиться в особых стационарных (квантовых) состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия. В стационарном состоянии атом не излучает.

2. **Правило частот**: атом может переходить из одного стационарного состояния в другое. При этом переходе может испускаться или поглощаться квант электромагнитной энергии, частота которого определяется разностью энергий атома в данных состояниях:

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n.$$

3. **Правило квантования орбит**: в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения орбитального момента импульса:

$$m_e \upsilon_n r_n = n\hbar.$$

Здесь $\upsilon_n$ – скорость движения электрона массой $m_e$ по круговой орбите радиусом $r_n$.

Последнее соотношение наряду со вторым законом Ньютона

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e \upsilon_n^2}{r_n},$$

описывающим движение электрона по $n$-ной круговой орбите под действием кулоновской силы, позволяют рассчитать радиус каждой орбиты $r_n$ и скорость движения электрона $\upsilon_n$ по этой орбите.

Для расчета полной энергии электрона используется классическое выражение, согласно которому в атоме водорода энергия складывается из кинетической энергии движущегося электрона и его потенциальной энергии в центральном симметричном силовом поле ядра.

$$E_n = \frac{m_e \upsilon_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n},$$

которое после подстановки рассчитанных из предыдущих соотношений значений $\upsilon_n$ и $r_n$ приобретает вид:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{R}{n^2}, \qquad E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (эВ)}.$$

Полученное соотношение говорит о том, что энергия атома водорода дискретна (квантована). Знак «–» в выражении ($E < 0$) означает, что электрон находится в атоме в связанном состоянии. Чем меньше **главное квантовое число *n***, тем состояние устойчивее. Состояние с $n = 1$, имеющее наименьшую энергию $E_1 = -13,6$ эВ, является основным энергетическим состоянием атома, все остальные состояния ($n > 1$) – возбужденные. Возможные значения энергии атома приведены на энергетической диаграмме стационарных состояний атома водорода (рис. 15-1). По мере роста главного квантового числа $n$ энергетические уровни располагаются теснее и при $n = \infty$ энергия $E_\infty = 0$. При $E > 0$ движение электрона является свободным; область непрерывного спектра $E > 0$ соответствует ионизованному атому. Энергия ионизации атома водорода равна $E = -E_1 = 13,6$ эВ.

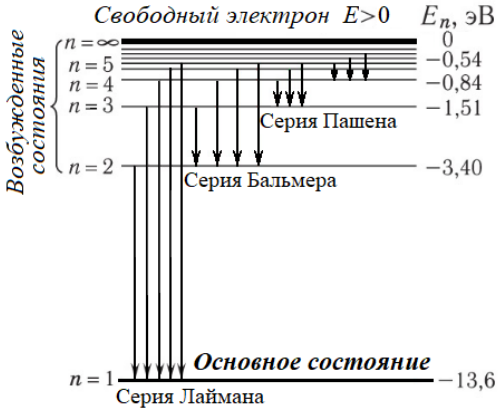


Рис. 15.1. Энергетическая диаграмма стационарных состояний атома водорода

Согласно правилу частот, при переходе атома из состояния $m$ в состояние $n$ (что соответствует переходу электрона с орбиты $m$ на орбиту $n$) излучается квант энергии с частотой (длиной волны), рассчитываемой по формуле:

$$\nu_{mn} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \qquad \frac{1}{\lambda_{mn}} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

где $R$ = 3,29 · 10$^{15}$ с$^{-1}$ или $R' = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга для частоты (длины волны). Переходы на определенный уровень $n$ с различных уровней $m > n$ образуют серии спектральных линий излучения атома водорода. Излучение, испускаемое при переходах на уровень $n$ = 1 (серия Лаймана) соответствует ультрафиолетовой области, на уровень $n$ = 2 (серия Бальмера) находится в видимом диапазоне, на уровень $n$ = 3 (серия Пашена), а также на другие уровни с более высоким $n$ соответствуют инфракрасному диапазону.

Энергетический спектр водородоподобного атома (с зарядом +$Ze$ и одним электроном) в квантовой механике рассчитывается путем решения уравнения Шредингера, в котором в качестве потенциальной энергии берется энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром водородоподобного атома

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Расчет собственных значений энергии $E_n$ электрона в водородоподобном атоме дает выражение, которое для $Z$ = 1 совпадает с полученным в теории Бора

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Энергетические уровни электрона в атоме и размеры электронного облака определяются **главным квантовым числом *n***, которое может принимать любые целочисленные значения, начиная с единицы.

При решении уравнения Шредингера выяснилось, что обусловленные орбитальным движением электрона механический момент импульса электрона $L_l$ и его магнитный момент $\mu_l$ квантуются в соответствии с выражениями:

$$L_l = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \qquad \mu_l = -\sqrt{l(l+1)}\mu_Б$$

Здесь ***l* – орбитальное квантовое число** ($l$ = 0, 1, 2 , 3, … ($n$ – 1)), определяющее как механический момент импульса электрона в атоме, так и магнитный момент, $\mu_Б = e\hbar / 2m_e$ = 0,927·10$^{-23}$Дж/Тл – магнетон Бора, и характеризующее форму электронного облака. Знак «–» перед $\mu_l$ означает, что магнитный момент направлен в сторону, противоположную механическому. Проекция момента импульса электрона и магнитного момента на направление $z$ внешнего магнитного поля также квантуются:

$$L_{lz} = m_l \hbar, \qquad \mu_{lz} = m_l \mu_Б$$

где $m_l$ **– магнитное орбитальное квантовое число** ($m_l$ = 0, ± 1, ± 2,. ± 3,… ±$l$), определяющее проекцию момента импульса электрона на заданное направление, т.е. характеризующее пространственную ориентацию электронного облака. Электронное облако – это квантовомеханический аналог орбиты, называемой также атомной орбиталью.

Также выяснилось, что для корректного объяснения атомных спектров необходимо учитывать существование собственного (спинового) механического и магнитного моментов электрона, имеющих квантовую природу и являющихся неотъемлемым свойством любой элементарной частицы, подобным заряду и массе. Собственный механический момент электрона называют **спином**. Значения спинового механического и магнитного моментов определяются соотношением

$$L_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \qquad \mu_s = -2\sqrt{s(s+1)}\mu_Б.$$

Здесь $s$ – спиновое квантовое число. Для электрона возможно единственное значение $s$ = 1/2, т.е. величина (но не направление!) спинового момента электрона остается постоянной. Для других микрочастиц оно может быть как полуцелым, так и целым (и равным нулю). Спин составных микрочастиц, например, атомов, определяемый спинами входящих в него частиц, зависит от их взаимной ориентации и обычно не превышает нескольких единиц.

Существование спина электрона приводит к возможности его различных ориентаций в пространстве, т.е. к квантованию проекций спинового механического и магнитного момента на направление внешнего магнитного поля:

$$L_{sz} = m_s \hbar, \qquad \mu_{sz} = 2 m_s \mu_Б.$$

Опытами установлено, что возможны только две ориентации спина электрона в магнитном поле, антипараллельные между собой. **Магнитное спиновое квантовое число** $m_s$, задающее ориентацию спина, может принимать только два значения $m_s = \pm 1/2$.

Полный момент импульса электрона складывается из орбитального и спинового моментов и определяется квантовым числом, принимающим значения $j = l - \dfrac{1}{2},\ l + \dfrac{1}{2}$. Для изолированного атома именно полный момент импульса является сохраняющейся величиной.

Состояние электрона в атоме водорода описывается собственными функциями $\psi_{nlm_lm_s}(r,\theta,\phi)$, явный вид которых имеется в справочниках. Каждому собственному значению $E_n$ (кроме $E_1$) соответствует несколько собственных функций $\psi_{nlm_lm_s}$, отличающихся значениями квантовых чисел $l$, $m_l$, $m_s$, т.е. атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в несколько различных состояниях. Главное квантовое число, обозначаемое числом $n$ или буквами латинского алфавита ($K$, $L$, $M$, $N$,…), определяет энергию (размер) электронного облака (орбитали) и номер энергетического уровня, на котором находится электрон. Орбитальное квантовое число $l$ определяет форму орбиталей, которые обозначают, как $s$ ($l$=0), $p$ ($l$=2), $d$ ($l$=3), $f$ ($l$=4), $g$ ($l$=5) – орбитали. Совокупность орбиталей с одинаковыми значениями главного $n$ и орбитального $l$ квантовых чисел образует энергетический подуровень. Так как $l < n$, возможны подуровни: (1$s$), (2$s$, 2$p$), (3$s$, 3$p$, 3$d$), (4$s$, 4$p$, 4$d$, 4$f$) и т.д.

Таким образом, состояние электрона в атоме водорода определяется четырьмя квантовыми числами: $n$, $l$, $m_l$, $m_s$. Поэтому максимальное число электронов в находящихся в состоянии, задаваемом главным квантовым числом $n$ равно:

$$z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

## 15.2. Примеры решения задач

**Задача 15-1.** Определите радиус $r_n$ боровских орбит атома водорода, скорость движения электрона $\upsilon_n$ по этим орбитам и период обращения $T_n$ вокруг ядра. Рассчитайте численные значения этих величин для первой боровской орбиты.

**Решение.** Для решения задачи используем второй закон Ньютона, описывающий движение электрона по круговой орбите под действием кулоновской силы

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e \upsilon_n^2}{r_n},$$

а также правило квантования момента импульса электрона.

$$m_e \upsilon_n r_n = n\hbar .$$

Совместное решение этих двух уравнений позволяет определить обе искомые величины, как

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \cdot n^2, \qquad \upsilon_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n}.$$

Для определения периода обращения воспользуемся соотношением

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{\upsilon_n},$$

которое после подстановки значений скорости и радиуса преобразуется к виду

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{\upsilon_n} = \frac{2\pi (4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^3}{m_e e^4} \cdot n^3 = \frac{4\varepsilon_0^2 h^3}{m_e e^4} \cdot n^3 .$$

Подсчет численных значений искомых величин для первой боровской орбиты дает:

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0{,}53\ 10^{-10} \text{ м}, \qquad \upsilon_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} = 2{,}2\ 10^{6} \text{ м/с},$$

$$T_n = \frac{4\varepsilon_0^2 h^3}{m_e e^4} = 1{,}5 \cdot 10^{-16} \text{ с}.$$

**Задача 15-2.** Электрон в возбужденном состоянии атома водорода находится в 3р-состоянии ($n$ = 3, $l$ = 1). Определите изменение магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

**Решение**. Изменение магнитного момента $\Delta\mu_l$ может быть найдено как разность магнитных моментов $\mu_{l1}$ конечного (основного) состояния и $\mu_{l2}$ начального (возбужденного) состояния:

$$\Delta\mu_l = \mu_{l2} - \mu_{l1}.$$

Магнитный момент орбитального движения электрона зависит только от орбитального квантового числа:

$$\mu_{l1} = -\sqrt{l(l+1)}\mu_{\text{Б}}.$$

В основном состоянии $l = 0$ и $\mu_{l1} = 0$, в возбужденном состоянии $l = 1$ и $\mu_{l2} = -\sqrt{2}\mu_{\text{Б}}$. Соответственно,

$$\Delta\mu_l = -\sqrt{2}\mu_{\text{Б}} = -1{,}31 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}.$$

**Задача 15-3**. Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую.

**Решение**. Длина волны фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по формуле Бальмера

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Искомая длина волны $\lambda_{62}$, соответствующая переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую может быть рассчитана, как

$$\lambda_{62} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)} = 4{,}1\cdot 10^{-7}\text{ м.}$$

## 17. Радиоактивность

### 17.1. Основные понятия и формулы

Ядро – центральная часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный электрический заряд $Ze$, где $Z$ – порядковый номер в таблице элементов. Атомные ядра состоят из $Z$ положительных протонов, определяющих заряд ядра, и $N$ нейтронов, не имеющих заряда. Обозначение элемента с указанием чисел $Z$ и $N$ выглядит так: ${}_{Z}^{A}X$, где $X$ – химический символ элемента. $A = N + Z$ – число нуклонов (протонов и нейтронов), называемое массовым числом.

Радиоактивностью называется способность некоторых атомных ядер к самопроизвольному (спонтанному) изменению состава атомного ядра, сопровождаемому испусканием различных видов радиоактивных излучений и элементарных частиц. Различается естественная и искусственная радиоактивность. Естественной называется радиоактивность, наблюдающаяся у существующих в природе неустойчивых изотопов, искусственная радиоактивность – это радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций. Процессы, происходящие в ходе радиоактивного распада, могут быть описаны символическим соотношением:

$${}_{Z_1}^{A_1}\mathrm{X} \to {}_{Z_2}^{A_2}\mathrm{Y} + a + b + \gamma,$$

где X и Y – символы исходного и конечного химического элемента; $A_1$, $A_2$ и $Z_1$, $Z_2$ – массовые и зарядовые числа исходного и конечного ядра; $a$ – частицы, вылетающие из ядра; $\gamma$ – сопровождающее распад $\gamma$- или рентгеновское излучение. При радиоактивном распаде выполняется закон сохранения полной релятивистской энергии, импульса, заряда и массового числа (общего числа нуклонов – протонов и нейтронов). Электрону приписывают массовое число, равное нулю. Сопровождающее $\alpha$ – и $\beta$ – распады и испускаемое дочерним ядром $\gamma$-излучение (коротковолновое электромагнитное излучение с длиной волны, меньшей $10^{-10}$ м) не вызывает изменения заряда и массового числа ядер. Гамма-лучи являются основной формой уменьшения энергии возбужденных продуктов радиоактивных превращений.

Основные типы радиоактивности:

1) альфа-распад – вылет $\alpha$-частицы – системы из двух протонов и двух нейтронов, т.е. ядра атома гелия ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$:

$${}_{Z}^{A}\mathrm{X} \to {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y} + {}_{2}^{4}\mathrm{He} + \gamma.$$

Заряд ядра уменьшается на 2 единицы, массовое число уменьшается на 4 единицы, процесс сопровождается испусканием ; $\gamma$-лучей.

2) бета-распад – взаимные превращения в ядре нейтрона в протона ($\beta_-$) и протона в нейтрон ($\beta_+$):

2а) $\beta_-$ – распад (электронный): ${}_{0}^{1}n \to {}_{1}^{1}p + \left({}_{-1}^{0}e + \tilde{\nu}\right)$,

$${}_{Z}^{A}\mathrm{X} \to {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + {}_{-1}^{0}\mathrm{e} + \tilde{\nu} + \gamma.$$

2б) $\beta_+$ – распад (позитронный): $\,{}^1_0p \rightarrow {}^1_1n + \left({}^0_{+1}e + \nu\right)$,

$$ {}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-1}^{\ A}\mathrm{Y} + {}^0_{+1}\mathrm{e} + \nu + \gamma . $$

Сопровождаются вылетом электрона ${}^0_{-1}e$ или позитрона ${}^0_{+1}e$ и электронных антинейтрино ${}^0_0\bar{\nu}$ или нейтрино ${}^0_0\nu$. Заряд ядра при $\beta_-$ – распаде увеличивается на 1, при $\beta_+$ – распаде уменьшается на 1. Массовое число не изменяется.

2в) электронный захват – ядро поглощает один из $K$ – электронов своего атома, при этом один из протонов превращается в нейтрон, испуская нейтрино:

$$ {}^A_Z\mathrm{X} + {}^0_{-1}\mathrm{e} \rightarrow {}_{Z-1}^{\ A}\mathrm{Y} + \nu + \gamma(\text{рентген}), $$

сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

3) спонтанное деление – деление ядра обычно на два осколка, имеющих приблизительно равные массы и заряды. Заряд и массовое число делятся примерно пополам.

4) протонная радиоактивность – ядро претерпевает превращения, испуская один или два протона. Заряд и массовое число уменьшаются на единицу (или на два).

Обычно все типы радиоактивности сопровождаются испусканием гамма-лучей – жесткого коротковолнового электромагнитного излучения. Ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется материнским; возникающее дочернее ядро оказывается возбужденным, и его переход в основное состояние сопровождается испусканием γ-фотона. С учетом излучения энергия в процессе распада сохраняется.

Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется закону радиоактивного распада:

$$ N = N_0 e^{-\lambda t}, $$

где $N_0$ – количество ядер в данном объеме вещества в начальный момент времени $t = 0$; $N$ – число нераспавшихся ядер в том же объеме к моменту времени $t$; λ – постоянная распада, равная доле ядер, распадающихся в единицу времени. Число распавшихся ядер, соответственно, равно

$$ N - N_0 = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t}). $$

Период полураспада $T_{1/2}$ – время, за которое распадается половина первоначального количества радиоактивного вещества. $T_{1/2}$ находится в пределах от $3\cdot10^{-7}$ с до $5\cdot10^{15}$ лет. Характеризует устойчивость ядер к радиоактивному распаду. Постоянная распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ соотношением:

$$ T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. $$

Величина τ = 1/λ, обратная постоянной распада, называется средним временем жизни радиоактивного атома.

Используя соотношение для $T_{1/2}$, закон радиоактивного распада можно записать, как

$$ N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. $$

Величина $A = \lambda N = n/\tau$ называется активностью радиоактивного вещества. Активность измеряется числом распадов ядер радиоактивного вещества в единицу времени. Единица активности в системе СИ – беккерель (1 Бк = 1 расп/с).

Возникающие в результате радиоактивного распада ядра могут быть, в свою очередь, радиоактивными. Это приводит к возникновению цепочки или ряда радиоактивных превращений, заканчивающихся стабильным элементом. Совокупность элементов, образующих такую цепочку, называется радиоактивным семейством. В природе существуют 3 радиоактивных ряда (семейства), родоначальниками которых являются $^{238}U$ (ряд урана), $^{232}Th$ (ряд тория) и $^{235}U$ (ряд актиноурана). Конечные продукты – изотопы свинца $^{206}Pb$, $^{208}Pb$, $^{207}Pb$.

## 17.2. Примеры решения задач

**Задача 17-1.** Используя закон радиоактивного распада и связь постоянной распада с периодом полураспада, найти выражение, связывающее число нераспавшихся и распавшихся атомов с периодом полураспада.

**Решение**. Закон радиоактивного распада имеет вид:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. Подставляя это выражение в закон радиоактивного распада, имеем

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{T_{1/2}}\ln 2} = N_0 e^{\ln 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Итак, число нераспавшихся ядер $N_0$ и распавшихся ядер $N_0 - N$ может быть рассчитано, как

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, \qquad N_0 - N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = N_0(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}).$$

**Задача 17-2.** Период полураспада радиоактивного кобальта $^{60}_{27}Co$ равен 5,3 года. Определите, какая доля первоначального количества ядер этого изотопа распадется через 5 лет.

**Решение**. Закон радиоактивного распада определяет число нераспавшихся ядер, как:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \text{ где } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Соответственно, число распавшихся ядер будет $N_0 - N$, а их доля от начального числа будет определяться соотношением

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\tau t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5,3}\cdot 5} = 1 - 0,52 = 0,48.$$

Используя другое соотношение

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = (1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}) = 1 - 2^{-\frac{5}{5,3}} = 1 - 0,52 = 0,48,$$

получаем тот же самый результат.

**Задача 17-3**. Какая доля радиоактивных ядер распадется через время, равное половине периода полураспада?

**Решение**. Используем закон радиоактивного распада в форме

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

По условию задачи рассматривается результат за время, равное половине периода полураспада, т.е.

$$t = \frac{1}{2} T_{1/2}.$$

По прошествии этого времени число нераспавшихся ядер становится равным

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{T_{1/2}}{2T_{1/2}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{N_0}{\sqrt{2}} = 0,71 \cdot N_0 \cdot$$

Соответственно, расчет доли нераспавшихся ядер $N/N_0$ и распавшихся ядер $(N_0 - N)/N_0$ приводит к следующему результату:

$N/N_0 = 0,71$; $\quad (N_0 - N)/N_0 = 0,29.$

# 18. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

## 18.1. Основные понятия и формулы

Атомное ядро имеет размеры близкие к $10^{-15}$ м и состоит из протонов и нейтронов (нуклонов). Общее число нуклонов в ядре называется массовым числом *A*. Атомное ядро характеризуется зарядом *Ze*, где *Z* – зарядовое число ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в таблице Менделеева.

Энергия связи нуклонов в ядре, т.е. энергия, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, равна

$$E_{\text{св}} = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}\right]c^2,$$

где $m_p$, $m_n$, $m_{\text{я}}$ – массы протона, нейтрона и ядра. Величина

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}},$$

равная разности между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра называется дефектом массы ядра. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра. Удельная энергия связи $\delta E_{\text{св}} = E_{\text{св}}/A$ (энергия связи, отнесенная к одному нуклону) характеризует устойчивость атомных ядер. При практических вычислениях массы всех частиц и атомов выражаются в атомных единицах массы: 1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. В энергетических единицах 1 а.е.м. = 931.494 МэВ.

Ядерные реакции – это превращение атомных ядер при взаимодействии с элементарными частицами или друг с другом. Символическая запись ядерной реакции имеет вид

$$^{A}_{Z}\text{X} + a \to {}^{A'}_{Z'}\text{Y} + b,$$

например:

$$^{14}_{7}\text{N} + {}^{4}_{2}\text{He} \to {}^{17}_{8}\text{O} + {}^{1}_{1}\text{H}, \qquad ({}^{1}_{1}\text{H} = {}^{1}_{1}p = p);$$

$$^{14}_{7}\text{N} + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}\text{C} + {}^{1}_{1}\text{H};$$

$$^{9}_{4}\text{Be} + {}^{1}_{1}\text{H} \to {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{6}_{3}\text{Li};$$

$$^{7}_{3}\text{Li} + {}^{1}_{1}\text{H} \to {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{4}_{2}\text{He}.$$

Изменение энергии при ядерной реакции (тепловой эффект ядерной реакции) определяется соотношением

$$Q = c^2\left(\Sigma m_1 - \Sigma m_2\right),$$

где $\Sigma m_1$ – сумма масс частиц до реакции, $\Sigma m_2$ – сумма масс частиц после реакции. Чтобы получить энергию реакции в МэВ, надо массу частиц по Таблице Менделеева выразить в атомных единицах массы (а.е.м.) и использовать формулу в виде

$$Q = 931,5\left(\Sigma m_1 - \Sigma m_2\right).$$

В отличие от радиоактивного распада, который всегда протекает с выделением энергии, ядерные реакции могут быть как экзотермическими (с выделением энергии), так и эндотермическими (с поглощением энергии). В ядерных реакциях выполняются законы сохранения релятивистской полной энергии, заряда, числа нуклонов и импульса.

В цепной реакции деления частицы, вызывающие реакцию, образуются как продукты этой реакции. Цепная реакция характеризуется коэффициентом размножения $k$ нейтронов. Скорость нарастания цепной реакции и число нейтронов в момент времени $t$ определяются по формулам:

$$\frac{dN}{dt} = N_0(k-1)/T, \qquad N = N_0 e^{(k-1)t/T},$$

где $N_0$ и $N$ число нейтронов в начальный момент и в момент времени $t$, $T$ –среднее время жизни одного поколения.

### 18.2. Примеры решения задач

**Задача 18-1**. Найдите дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра серебра $^{108}_{47}\mathrm{Ag}$.

**Решение.** Число протонов в ядре серебра определяется нижним индексом: $Z = 47$. Число нуклонов в ядре серебра задается верхним индексом $A = N + Z = 108$, соответственно, число нейтронов равно:

$$N = A - Z = 108 - 47 = 61.$$

Для расчета дефекта массы воспользуемся соотношением:

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_я =$$
$$= (47 \cdot 1{,}00783 + 61 \cdot 1{,}00867 - 107{,}869) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 1{,}706 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Энергия связи находится, как:

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2 = 1{,}706 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{м}^2/\text{с}^2 = 1{,}536 \cdot 10^{-10}\ \text{Дж},$$

что позволяет рассчитать удельную энергию связи:

$$\delta E_{св} = \frac{E_{св}}{A} = \frac{1{,}536 \cdot 10^{-10}\ \text{Дж}}{108} = 1{,}42 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж}$$

**Задача 18-2.** Вычислить энергию ядерной реакции $^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to p + {}^7_3\mathrm{Li}$. Выделяется или поглощается энергия при этой реакции?

**Решение.** Энергия ядерной реакции определяется по формуле:

$$Q = c^2\left(m_1 + m_2 - \sum m_i'\right),$$

где $m_1$ и $m_2$ – массы частиц, вступающих в реакцию, $\sum m_i'$ – сумма масс частиц, образовавшихся в результате реакции. Чтобы получить энергию реакции в МэВ, надо массу частиц выразить в а.е.м. и использовать формулу в виде

$$Q = 931{,}5\left(m_1 + m_2 - \sum m_i'\right).$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать массы атомов вместо масс их ядер. Из справочных данных находим

$$m_{^4_2\mathrm{He}} = 4{,}00260\ \text{а.е.м.};$$
$$m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}00783\ \text{а.е.м.};$$
$$m_{^7_3\mathrm{Li}} = 7{,}01601\ \text{а.е.м.}$$

Дефект массы реакции равен

$$2m_{^4_2\mathrm{He}} - m_{^1_1\mathrm{H}} - m_{^7_3\mathrm{Li}} = -\ 0{,}01864\ \text{а.е.м.}$$

Подставляя значения дефекта массы реакции, для энергии ядерной реакции получим

$$Q = 931{,}5\ (-\ 0{,}01864) = -\ 17{,}36\ \text{МэВ}.$$

Поскольку $Q < 0$, то энергия в результате реакции поглощается.

**Задача 18-3.** Какую энергию $W$ (в киловатт-часах) можно получить от деления массы $m$ = 1 г урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$, если при каждом акте распада выделяется энергия $Q$ = 200 МэВ?

**Решение.** Полученная энергия $W$ может быть представлена как

$$W=Q\cdot N,$$

где $N$ – число атомов, содержащихся в 1 г урана. Это число может быть рассчитано с помощью соотношения

$$N=\frac{m}{M}N_A,$$

через молярную массу урана $M$ и число Авогадро $N_A$.

$$W=Q\frac{m}{M}N_A=200\cdot 10^6\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,\frac{1\cdot 10^{-3}}{235\cdot 10^{-3}}6,02\cdot 10^{23}=8,2\cdot 10^{10}\text{ Дж.}$$

Для перевода полученной энергии в киловатт-часы необходимо учесть соотношение 1 кВт·ч = $3,6\cdot 10^6$ Дж и тогда

$$W=\frac{8,2\cdot 10^{10}}{3,6\cdot 10^6}=2,3\cdot 10^4\text{ кВт·ч.}$$