**Лекция 1, 2.**

**ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Во многих ситуациях, встречающихся в промышленности, сельском хозяйстве, экономической деятельности и т.д., задача оптимизации плана некоторых экономикопроизводственных действий может быть записана в виде линейных уравнений и неравенств с линейным же, относительно искомых, определяющих этот план переменных целевым функционалом. К задачам этого же вида сводятся очень многие задачи оптимизации и принятия решений из некоторых других самостоятельных направлений прикладной математики.

Соответственно возникает потребность в математической теории позволяющей решать такие задачи. Такая теория существует и называется *линейным программированием*. Данное название возникло в 30-е годы, когда представления о программировании на компьютере ещё не существовало. Под программированием, фактически подразумевается планирование. Однако, этот термин уже укоренился, и не только в линейном случае. Имеются так же и такие названия математических теорий решения задач оптимизации, как *нелинейное программирование* или *динамическое программирование.*

В общем виде задача линейного программирования (ЛП) заключается в отыскании таких неотрицательных чисел x1, x2..., хnкоторые максимизируют (минимизируют) линейную функцию:



при условии выполнения системы неравенств***:***



При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как пропорциональность и аддитивность. **Пропорциональность** означает, что вклад каждой переменной в ЦФ и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть ***прямо пропорционален*** величине этой переменной. Например, если продавая какой либо товар в общем случае по одной цене рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной. Т.е. в разных ситуациях *одна* единица товара будет приносить *разный* доход. **Аддитивность** означает, что ЦФ и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

При решении задачи линейного программирования целесообразно бывает введение следующих определений.

**Допустимое решение**– это совокупность чисел (план) , удовлетворяющих ограничениям задачи (1.1).

**Оптимальное решение –** это план, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения ***экономики***, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1. Что является ***искомыми величинами*** задачи?
2. Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения ? (это может быть: прибыль, время, количество отходов и т.д.)
3. В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?
4. Какие ***условия*** в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в ***математическом*** виде, т.е. к записи математической модели.

а) Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые как правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде .

б) Цель решения записывается в виде ***целевой функции***, обозначаемой, например, . Математическая формула ЦФ  отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

в) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***ограничений***. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели целесообразно указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

***Задача***

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Известны расходы ингредиентов А и В на 1 т соответствующих красок и максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов на складе.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ингредиенты | Расход ингредиентов, т ингр./т краски | Запас, т ингр./сутки |
| Краска 1-го вида | Краска 2-го вида |
| А | 1 | 2 | 6 |
| В | 2 | 1 | 8 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

**Решение**

В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные* *объемы производства* каждого вида красок:

 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного* *дохода*, который должен стремится к *максимуму*.Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи краскок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т.е.  и  т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс.руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен  тыс.руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида –  тыс.руб. в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

 [тыс.руб./сутки],

.

Возможные объемы производства красок  и  ограничиваются следующими условиями:

* количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;
* согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;
* объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;
* объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

* 1. расходом ингредиентов;
	2. рыночным спросом на краску;
	3. неотрицательностью объемов производства.

Ограничения **по расходу** любого из ингредиентов имеют следующую ***содержательную*** форму записи

.

Запишем эти ограничения в ***математической*** форме.

*Левая часть* *ограничения*– это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента А на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. А) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. А). Тогда на производство  т краски 1-го вида и  т краски 2-го вида потребуется  т ингр. А.

*Правая часть* *ограничения* – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента А в сутки. Таким образом, ограничение по расходу А имеет вид

.

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В

.

***Примечание*** Следует всегда проверять размерность левой и правой части каждого из ограничений, поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет

***содержательную*** форму



и ***математическую*** форму

.

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида имеет

***содержательную*** форму



и ***математическую*** форму

.

**Неотрицательность** объемов производства задается как

.

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид





Для задач линейного программирования содержащих только две переменные  и  применим графический способ решения. Этот способ основан на том факте, что в случае двух переменных множество допустимых решений можно построить на двухмерной плоскости.

**ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛП**

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач ЛП с двумя переменными. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи. Каждое из неравенств задачи ЛП определяет на координатной плоскости (x1, x2 ) в некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений** (ОДР). ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучем, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи (1) ОДР является пустым множеством.

Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР т.е. ЦФ L(X)=c1x1+c2x2 принимает свое max(min) значение на границе области, точнее в ее угловых точках.

При поиске оптимального решения задач ЛП возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений (**альтернативный оптиум**); ЦФ не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

**Методика решения задач ЛП графическим методом**

1. В ограничениях задачи (1) замените знаки неравенств на знаки точных равенств и постройте соответствующие прямые.
2. Найдите и заштрихуйте полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи (1). Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

***Если*** неравенство истинное, ***то*** надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; ***иначе*** (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x1 и x2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси x1 и правее оси x2 , т.е. в I-м квадранте. Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделите на графике такие прямые.

**III.** Определите ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделите ее. При отсутствии ОДР задача ***не имеет решений***, о чем сделайте соответствующий вывод.

**IV.** Если ОДР – не пустое множество, то определите координаты угловых точке. Определение координат сводится к решению системы соответствующих линейных уравнений.

1. Подставьте координаты угловых точек в уравнение для Ц.Ф. и найдите max (min) значение целевой функции.

Можно вместо перебора всех угловых точек (**пункт IV, V*)*** произвести следующие действия:

**IV.а** Провести вектор координатами которого служат коэффициенты в уравнении с целевой функцией. Сдвигать прямую перпендикулярную построенному вектору, от начала по направлению вектора, до момента, когда пресечение сдвигаемой прямой с ОДР будет составлять одну точку.

**V.а** Координаты найденной точки будут являться оптимальным планом, а если их подставить в уравнение целевой функции, то получим ее max (min) значение.

***Задача***

Найдем оптимальное решение задачи о красках, математическая модель которой имеет вид:





Построим прямые ограничений (рис. 1).



Рис. 1. Графическое решение задачи



Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим 0≤1 , что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 1.). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Найдем координаты точек пересечения прямых ограничений, т.е. координаты угловых точек. В некоторых случаях хороший рисунок позволяет сразу определять координаты угловых точек.

;

;

;

;

Для определения координаты точки Е решим систему уравнений с ограничениями (1) и (2).



Решая данную систему получаем: 



.

Найдем значение целевой функции в угловых точках, т.е. подставим их координаты в уравнение .













Е – это точка максимума ЦФ.

Таким образом, наилучшим режимом работы фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме 3 1/3 т. и краски 2-го вида в объеме 1 1/3 т. Доход от продажи красок составит 12 2/3 тыс. руб. в сутки.

Решая модифицированным графическим методом, проведем вектор координатами которого служат коэффициенты в уравнении с целевой функцией , сдвигая прямую перпендикулярную построенному вектору (от начала к концу) найдем точку являющуюся последней в пресечении сдвигаемой прямой с ОДР (это точка Е) ее координаты найденные из решении системы уравнений будут являться оптимальным планом, а значение целевой функции в ней будет max.

В более общем случае, разработан и широко применяется универсальный метод решения любой задачи ЛП, называемый симплекс-методом.

Симплекс метод, как метод решения задач ЛП был предложен в американским математиком-экономистом Данцигом в 1951 году.

Графически симплекс метод представляет из себя передвижение по выпуклому многограннику от вершине к вершине, при этом значение целевой функции на каждом шаге улучшается до тех пор, пока не достигается оптимум.

Идея симплекс метода состоит в том, чтобы преобразовать уравнение содержащее целевую функцию к виду: , т.к. в этом случае становиться возможным выразить , а в силу того что перед нами ставится задача максимизировать L, то эта задача достигается в случае когда все переменные присутствующие в данном уравнении принимают нулевые значения (т.к. переменные не отрицательны по условию).

Алгоритм решения задачи при помощи симплекс метода состоит в следующем:

1. Вводятся переменные, позволяющие систему неравенств превратить в систему уравнений.

(Ограничение-неравенство исходной задачи ЛП, имеющее вид ““, можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части некоторой новой неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида ““ - в ограничение равенство вычитанием из его левой части неотрицательной переменной. Переменные вводимые для преобразования ограничений-неравенств в ограничения - равенства называют *дополнительными.* Их число равно числу преобразуемых неравенств.)

2. Выбирается переменная (рабочая переменная) входящая в целевую функцию с max коэффициентом. (Уничтожать переменные целесообразно начиная с самой «неподходящей для итогового вида», таким образом выбирается переменная входящая в уравнение с целевой функцией которую уничтожим в первую очередь.)

3. Сравниваются частные от деления свободных членов на коэффициенты при этой переменной и выбирается строка с min>0 частным от деления (рабочее уравнение). (Выбирается уравнение, в котором рабочая переменная имеет «наибольший вес» относительно других переменных)

4. Рабочее уравнение нормируется (т.е. делится на коэффициент перед рабочей переменной), из остальных строк исключаем рабочая переменная методом Гаусса. (Проведение данной операции обусловлено необходимостью исключить возможность проявления уже исключенной из уравнения с целевой функцией переменной в дальнейшем при последующих преобразованиях.)

5. Проверяется, существуют ли положительные коэффициенты перед переменными в уравнении с целевой функцией: если да то возвращаются к пункту 2, если нет то решение законченно.

В качестве примера рассмотрим задачу решенную графическим методом, задачу про краски.





***Решение***

Введем свободные переменные x3, x4, x5, x6,для того чтобы систему неравенств превратить в систему уравнений.



Выбираем переменную входящую в целевую функцию с max коэффициентом, это x1. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при x1 6; 4; -1; +∞. Выбираем строку с min>0 частным от деления и нормируем ее, из остальных строк исключаем x1 методом Гаусса.



Выбираем переменную входящую в целевую функцию с max коэффициентом, это x2. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при x2 4/3; 8; 10; 2. Выбираем строку с min>0 частным от деления и нормируем ее, из остальных строк исключаем x2 методом Гаусса.



Так как все коэффициенты перед переменными в уравнении с целевой функцией <0 то решение законченно.

В силу не отрицательности переменных из уравнения содержащего целевую функцию следует, что она достигает максимального значения в случае когда x3=0 и x4=0, в этом случае 

**Лекция 3, 4.**

**ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА**

Задача о размещении (транспортная задача) – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям. Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходными параметрами при построении модели для решения транспортной задачи являются:

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

2) ai – запас продукции в пункте отправления Ai (i = 1, n ) [ед. прод.].

3) bj – спрос на продукцию в пункте назначения Bj (j =1, m) [ед. прод.].

4) cij – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления Ai в пункт назначения Bj [руб. / ед. прод.].

Искомыми параметрами при построении модели для решения транспортной задачи являются:

1) x ij – количество продукции, перевозимой из пункта отправления Ai в пункт назначения Bj [ед. прод.].

2) L(X) – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

*Основными этапами построения модели* для решения транспортной задачи являются:

**I. Определение переменных.** (Этот этап весьма формален, т.к. переменными как правило служат x ij – количество продукции, перевозимой из пункта отправления Ai в пункт назначения Bj)

**II. Проверка сбалансированности задачи.** (Задача называется сбалансированной если сумма запасов продукции во всех пунктах отправления равна суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е. . В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.: 

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления: 

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы cф, величина которых обычно приравнивается к нулю cф =0 . Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина cф может быть любым положительным числом.)

**III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.**

Общий вид транспортной матрицы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Запасы продукции, в пунктах отправления |
| B1 | B2 | … | Bm |
| A1 |  |  |  |  | … |  |  | a1 |
|  | c11 |  | c12 |  | c1m |
| A2 |  |  |  |  | … |  |  | a2 |
|  | c21 |  | c22 |  | c2m |
| … | … | … | … | … | … |
| An |  |  |  |  | … |  |  | an |
|  | cn1 |  | cn2 |  | cnm |
| Потребности в продукции, впунктах назначения | b1 | b2 | … | bm |  |

Иногда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов cз. Запрещающие тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице



Существующий алгоритм решения транспортных задач (**метод потенциалов**) предполагает, что ЦФ стремится к минимуму. Однако существуют ситуации, когда в рамках транспортной модели требуется максимизировать ЦФ, например, общий доход, объем продаж, прибыль, качество выполняемых работ и т.д. В этом случае в модель вместо искомой целевой функции L(X) вводится ЦФ L1(X)=-L(X), в которой тарифы умножаются на (-1). Таким образом, максимизация L(X) будет соответствовать минимизации L1(X).

Решение транспортной задачи осуществляется при помощи метода потенциалов, который является итерационным методом. В качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов необходимо построение так называемого опорного плана, который является допустимым решением транспортной задачи.

Рассмотрим три основных метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее приближение.

Все рассматриваемые методы нахождения опорных планов отличаются только *способом выбора клетки* для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода.

Метод северо-западного угла

На каждом шаге метода северо-западного угла из всех не вычеркнутых клеток выбирается самая левая и верхняя (северо-западная) клетка. Другими словами, на каждом шаге выбирается первая из оставшихся не вычеркнутых строк и первый из оставшихся не вычеркнутых столбцов. Для того, чтобы заполнить клетку (i,j), необходимо сравнить текущий запас товара в рассматриваемой i-й строке aiтек с текущей потребностью в рассматриваемом j-м столбце bjтек.

Если существующий запас позволяет перевезти всю потребность, то:

• в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение потребности bjтек

• j-й столбец вычеркивается, поскольку его потребность уже исчерпана;

• от существующего запаса в i-й строке отнимается величина сделанной перевозки, прежний запас зачеркивается, а вместо него записывается остаток, т.е. (aiтек- bjтек) тек

Если существующий запас не позволяет перевезти всю потребность, то:

• в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение запаса aiтек ;

• i-я строка вычеркивается, поскольку ее запас уже исчерпан;

• от существующей потребности в j-ом столбце отнимается величина сделанной перевозки, прежняя потребность зачеркивается, а вместо нее записывается остаток, т.е. (bjтек- aiтек)

Нахождение опорного плана продолжается до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы.

Метод минимального элемента

На каждом шаге метода минимального элемента из всех не вычеркнутых клеток транспортной матрицы выбирается клетка с минимальной стоимостью перевозки min сij. Заполнение выбранной клетки производится по правилам, описанным выше.

Метод Фогеля

На каждом шаге метода Фогеля для каждой i-й строки вычисляются штрафы di как разность между двумя наименьшими тарифами строки. Таким же образом вычисляются штрафы dj для каждого j-го столбца. После чего выбирается максимальный штраф из всех штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, соответствующем выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом min сij.

Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом min сij.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка (i,j) с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по i-й строке и j-му столбцу.

***Задача***

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 110, 90, 130, 100 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие:



***Решение***

Проверка сбалансированности задачи показывает, что суммарный объем запасов  больше суммарного объема потребностей, т.е. введение необходимо введение фиктивного столбца , после чего задача становиться сбалансированной 

Результаты нахождения опорного плана различными методами представлены в следующих таблицах.

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом северо-западного угла.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Запасы продукции, в пунктах отправления |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  | 210/100/10/0 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 50 |  |  |  | 170/50 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 50 |  | 15 |  | 65/15/0 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потребности в продукции, в пунктах назначения | 110/0 | 90/0 | 130/120/0 | 100/50/0 | 15/0 | 445=445 |

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:



Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом минимального элемента.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Запасы продукции, в пунктах отправления |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 130 |  | 80 |  |  |  | 210/80/0 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 25 |  |  |  | 20 |  | 15 |  | 170/60/35/15/0 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 65 |  |  |  |  |  |  |  | 65/0 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потребности в продукции, в пунктах назначения | 110/0 | 90/25/0 | 130/0 | 100/20/0 | 15/0 | 445=445 |

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:



Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом Фогеля.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Запасы продукции, в пунктах отправления | Штрафы строк |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 110 |  | 100 |  |  |  | 210/110/0 | 1 | 1 | 1 | **7** |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 25 |  | 20 |  |  |  | 15 |  | 170/60/35/15/0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 0 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 65 |  |  |  |  |  |  |  | 65/0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потребности в продукции, в пунктах назначения | 110/0 | 90/25/0 | 130/20/0 | 100/0 | 15/0 | 445=445 |  |  |  |  |  |  |  |
| Штрафы столбцов | **3** | 3 | 2 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **3** | 2 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 | **7** | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 4 |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 4 |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:



Отметим, что хотя введенные фиктивные строки или столбцы и считаются равноправными, но в случае задания в них нулевых тарифов эти тарифы не считаются как минимальные при построении опорных планов.

Отметим, что опорный план найденный методом северо-западного угла дает в общем случае наихудшее приближение, т.к. является «слепым», т.е. совершенно не зависит от тарифов.

Метод минимального элемента предполагает перевозки в первую очередь в те пункты назначения, доставка в которые обойдется дешевле. В силу этого в общем случае суммарные затраты на транспортировку при применении этого метода несколько меньше.

Метод Фогеля, путем введения понятия штрафов выбирает для перевозок те маршруты, не выбрав которые мы могли бы увеличить расходы на транспорт в дальнейшем, из-за отсутствия выбора места назначения или места отправления.

Начав решать транспортную задачу и получив опорный план необходимо приступить непосредственно к оптимизации этого плана. Данная оптимизация может быть проведена методом потенциалов.

Потенциал удобно воспринимать как себестоимость продукции.

**Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.**

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.
2. Строят начальное опорное решение (методом севкро западного элемента, минимального элемента или методом Фогеля).
3. Опорный план проверяется на условие «вырождения». Согласно теореме Данцига количество занятых клеток в плане не должно превышать суммарного числа строк и столбцов минус единицу  (Для дальнейшего решения необходимо добиться того чтобы количество занятых клеток в плане в точности равнялось суммарному числу строк и столбцов минус единица , этого можно добиться вводя при необходимости нулевые перевозки, т.е. заполняя некоторые клетки нулями).

где Кз – число занятых клеток; n – число строк (пунктов отправления); m – число столбцов (пунктов назначения).

1. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному плану. Для этого одной из строк, или одному из столбцов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) присваивают произвольное значение «потенциал» (значение потенциала удобно брать больше чем значение максимального тарифа) и через заполненные клетки, используя соотношение += (где – потенциал строки, а – потенциал столбца), строят систему потенциалов т.е. получают потенциалы всех строк и столбцов. (Поясним, что предложенная для построения системы потенциалов формула += позволяет по известной себестоимости товара в пункте отправления путем прибавления к ней тарифа за транспортировку определить себестоимость товара в пункте назначения, и обратно, преобразовав формулу -= по известной себестоимости товара в пункте назначения становится возможным, вычтя тариф за транспортировку определить себестоимость товара в пункте отправления. Еще раз отметим что система потенциалов строится только через заполненные клетки.)
2. Проверяют, условие оптимальности +, это условие можно проверять только для свободных клеток таблицы, т.к. в заполненных оно всегда выполнено. (Отметим, что не выполнение данного условия фактически означает возможность уменьшения себестоимости товара в пункте назначения, которое может быть достигнуто за счет перераспределения транспортных потоков.)
3. Если условие оптимальности выполнено для всех клеток матрицы, то нами получен оптимальный план перевозок (т.к. уменьшения себестоимости товара в пунктах назначения за счет перераспределения транспортных потоков невозможно) и необходимо только найти значение целевой функции L(X). Если же для какой либо клетки условие оптимальности нарушается, то необходимо применить «формальное правило улучшение плана» и вернуться к пункту 3.

**Формальное правило улучшения плана:**

а) начиная с клетки, имеющей нарушение, двигаясь только по горизонталям и вертикалям, строится замкнутый контур с вершинами в занятых клетках;

б) начиная с клетки, имеющей нарушение, нумеруются вершины контура (направление обхода контура значения не имеет);

в) в четных вершинах контура находится значение минимальной перевозки;

г) для балансировки матрицы в нечетные вершины контура найденное значение прибавляется, из четных вершин – вычитается. Получается новый, улучшенный план.

***Задача***

Найдем оптимальное решение транспортной задачи опорный план которой представлен следующей транспортной матрицей:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 50 |  |  |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 50 |  | 15 |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

***Решение***

Проверяем условие Данцига: 7= 5+3-1*.*

Строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  | 100 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 50 |  |  |  | 97 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 50 |  | 15 |  | 104 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 105 | 108 | 101 | 106 | 104 |  |

*Через заполненные клетки определяем потенциалы первого, второго, и третьего столбцов. Далее через клетку* (A2,B3) *определяем потенциал второй строки, через клетку* (A2,B4) *определяем потенциал четвертого столбца. После чего через клетку* (A3,B4) *определяем потенциал третей строки и через клетку* (A3,Bф) *потенциал последнего столбца.*

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,B4) *где нарушение составляет* 4, (A1,Bф) *где нарушение составляет* 4, (A2,B1) *где нарушение составляет* 6, (A2,B2) *где нарушение составляет* 6, (A2,Bф) *где нарушение составляет* 7 *и* (A3,B2) *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A2,Bф), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 35 |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  | 100 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 35 |  | 15 |  | 97 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 104 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 105 | 108 | 101 | 106 | 97 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,B4) *где нарушение составляет* 4, (A2,B1) *где нарушение составляет* 6, (A2,B2) *где нарушение составляет* 6 *и* (A3,B2) *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A2,B1), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 90 |  | 120 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  |  |  | 10 |  | 35 |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 90 |  | 120 |  |  |  |  |  | 103 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  |  |  | 10 |  | 35 |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 107 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 111 | 104 | 109 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,B4) *где нарушение составляет* 4, (A2,B2) *где нарушение составляет* 6 *и* (A3,B2) *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A2,B2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 80 |  | 130 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 10 |  |  |  | 35 |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 80 |  | 130 |  |  |  |  |  | 97 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 10 |  |  |  | 35 |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 107 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 105 | 98 | 109 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетке* (A1,B4) *где нарушение составляет* 4.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A1,B4).



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 45 |  | 130 |  | 35 |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 45 |  | 130 |  | 35 |  |  |  | 98 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 98 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 105 | 99 | 100 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,Bф) *где нарушение составляет* 2, (A3,B2) *где нарушение составляет* 5 *и* (A3,Bф) *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A3,B2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 130 |  | 80 |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 45 |  |  |  | 20 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 130 |  | 80 |  |  |  | 103 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 45 |  |  |  | 20 |  |  |  | 103 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 105 | 104 | 102 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно выполнено во всех клетках, следовательно получен оптимальный план перевозок. Суммарные затраты за транспортировку составит:*

.

Отметим, что мы за нулевое приближение мы выбрали опорный план полученный методом «северо-западного угла», в силу чего нам и пришлось производить большое количество итераций. Если бы в качестве начального приближения был выбран опорный план полученный методом «минимального элемента», то необходимое количество итераций было бы существенно меньше, а при выборе в качестве исходного опорного плана построенного «методом Фогеля» в данном примере вообще не пришлось бы производить итерации.

Отметим также что при решении данного примера контура которые мы строили получались прямоугольные, это не всегда так, контура могут быть различных форм, но строятся они всегда по одному принципу и в каждом случае могут быть получены единственным образом.



**Лекция 5, 6.**

**Эконометрия** – наука, изучающая количественные взаимосвязи экономических объектов и процессов при помощи математических и статистических методов и моделей. Основная задача эконометрии – построение количественно определенных экономико-математических моделей, разработка методов определения их параметров по статистическим данным и анализ их свойств. Наиболее часто используемым математическим аппаратом решения задач данного класса служат методы **корреляционно-регрессионного анализа**.

**1. Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа**

Понятие **корреляции** появилось в середине XIX века в работах английских статистиков Ф. Гальтона и К. Пирсона. Этот термин произошел от латинского*"correlatio"* - соотношение, взаимосвязь. Понятие **регрессии** (латинское *"regressio"* - движение назад) также введено Ф. Гальтоном, который, изучая связь между ростом родителей и их детей, обнаружил явление "регрессии к среднему" - рост детей очень высоких родителей имел тенденцию быть ближе к средней величине.

Теория и методы корреляционного анализа используются для выявления связи между случайными переменными и оценки ее тесноты.

Основной задачей регрессионного анализа является установление формы и изучение зависимости между переменными.

В общем случае две величины могут быть связаны функциональной зависимостью, либо зависимостью другого рода, называемой статистической, либо быть независимыми.

**Статистической** называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой.

Статистическая зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение среднего значения другой, называется **корреляционной**.

Корреляционные зависимости занимают промежуточное положение между функциональной зависимостью и полной независимостью переменных.

Между величинами, характеризующими экономические явления, в большинстве случаев существуют зависимости, отличные от функциональных. Действительно, в экономике закономерности не проявляются также точно и неизменно, как, например, в физике, химии или астрономии.

Пусть, например, мы рассматриваем зависимость величины Y от величины x – y(x).

Невозможность выявления строгой связи между двумя переменными объясняется тем, что значение зависимой переменной Y определяется не только значением переменной x, но и другими (неконтролируемыми или неучтенными) факторами, а также тем, что измерение значений переменных неизбежно сопровождается некоторыми случайными ошибками.

Вследствие этого корреляционный анализ широко используется при установлении взаимосвязи экономических показателей.

Итак, если с увеличением x значение зависимой переменной Y в среднем увеличивается, то такая зависимость называется **прямой** или **положительной**.

Если среднее значение Y при увеличении x уменьшается, имеет место **отрицательная** или**обратная корреляция**.

Если с изменением x значения Y в среднем не изменяются, то говорят, что корреляция – **нулевая**.

Часто при исследовании взаимосвязи между какими-либо показателями, представляют изучаемый объект в виде так называемого "черного (кибернетического) ящика".

Самый простой случай – изучение связи между одной переменной x, которую называют **фактором** (**входной переменной**, **независимой переменной**), и переменной Y, которую называют **откликом** (**реакцией**, **зависимой переменной**). Ситуации соответствует рисунок 6.1.

В более общем случае итогом функционирования системы является целый набор результирующих величин Ys (). При этом значения откликов Ysопределяются, с одной стороны, совокупностью факторов xj (), а , с другой стороны, набором возмущений (случайных, неконтролируемых факторов) xвi (). Такую ситуацию иллюстрирует рисунок 6.2.

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/ris6-1.gif | http://emm.ostu.ru/lect/images/ris6-2.gif |
| Рисунок 6.1 – Представление исследуемойсистемы в виде "черного ящика"(один фактор, один отклик) | Рисунок 6.2 – Представление исследуемойсистемы в виде "черного ящика"(общий случай) |

Собственно говоря, на протяжении столетий ученые (особенно, естествоиспытатели) используют подобные приемы, т.е. наблюдают, что произойдет с явлением, процессом (с откликом Y), если изменять значения влияющих на процесс факторов (переменных x).

**Корреляционным полем** называется множество точек {Xi, Yi} на плоскости XY (рисунки 6.3 - 6.4).

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/ris6-3.gif | http://emm.ostu.ru/lect/images/ris6-4.gif |
| Рисунок 6.3 – Пример корреляционного поля(положительная корреляция) | Рисунок 6.4 – Пример корреляционного поля (отрицательная корреляция) |

Если точки корреляционного поля образуют эллипс, главная диагональ которого имеет положительный угол наклона ( / ), то имеет место положительная корреляция (пример подобной ситуации можно видеть на рисунке 6.3).

Если точки корреляционного поля образуют эллипс, главная диагональ которого имеет отрицательный угол наклона ( \ ), то имеет место отрицательная корреляция (пример изображен на рисунке 6.4).

Если же в расположении точек нет какой-либо закономерности, то говорят, что в этом случае наблюдается нулевая корреляция.

**2. Линейная парная регрессия**

Связь зависимой переменной с одной или несколькими независимыми переменными описывается с помощью уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gif = f(x1, x2, ..., xm). |   |

Это уравнение показывает, каково будет в среднем значение *y*, если переменные *x* примут конкретные значения.

Если независимая переменная одна, то регрессия называется **парной**.

Построение уравнения регрессии включает два этапа:

1) определение вида зависимости (этап спецификации);

2) определение коэффициентов регрессии (этап идентификации).

Предположим, на этапе спецификации установлено, что между величинами *x* и *y* существует линейная зависимость. Реальные значения *y* будут отличаться от этой теоретической зависимости.

В общем случае линейное уравнение связи двух переменных, учитывающее случайные отклонения, можно представить в виде:

|  |  |
| --- | --- |
| y = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic5-9.gif + http://emm.ostu.ru/lect/images/pic5-14.gifx + http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-3.gif, | (6.1) |

где  – отклонение от теоретически предполагаемого значения;

 и  - неизвестные параметры (коэффициенты регрессии).

В уравнении (6.1) можно выделить две части:

 систематическую,  =  + x, где  характеризует некоторое среднее значение *y* для данного значения *x*;

 случайную ().

Коэффициенты  и  описывают вид зависимости для генеральной совокупности. Так как при выполнении подобных исследований всегда имеют дело с выборочной совокупностью, то истинные значения параметров  и  являются неизвестными, и мы можем говорить лишь об их оценках. Обозначим эти оценки, соответственно, *а* и *b*, тогда уравнение регрессии с оцененными параметрами будет иметь вид:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gifi = a + bxi,  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic3-15.gif | (6.2) |

где n - объем выборки.

Обозначим через ei отклонение реального значения отклика yi от теоретически рассчитанного по уравнению i.

Параметры *a* и *b* уравнения регрессии чаще всего оцениваются с помощью **метода наименьших квадратов (МНК)**.

Суть его состоит в том, чтобы зная положение точек на плоскости XY, так провести линию регрессии, чтобы сумма квадратов отклонений  этих точек от проведенной прямой вдоль оси OY была минимальной.

Математически критерий оценки параметров линейной парной регрессии записывается так:

|  |  |
| --- | --- |
| Q = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-5.gif  =  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-6.gif  =  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-7.gif  →  min. |   |

Условие существования экстремума функции – равенство нулю производной:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic2-7.gif | http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-8.gif = - 2 http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gif(yi - a - bxi) = 0,http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-9.gif = - 2 http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gif(yi - a - bxi)xi = 0. |

Раскрыв скобки и выполнив преобразования, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic2-48.gif | na + bhttp://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifyi,ahttp://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi + bhttp://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-11.gif = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxiyi. |

 |   |

Разделив первое уравнение на *n*, получим:

|  |  |
| --- | --- |
| a + bhttp://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-12.gif = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-13.gif, |   |

т.е. метод наименьших квадратов дает прямую, проходящую через точку (, ).

Решая систему, получим расчетные формулы для нахождения коэффициентов уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-14.gifa = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-13.gif - bhttp://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-12.gif. | (6.3) |

Заметим, что данные значения могут быть легко получены средствами пакета *Microsoft Excel*. Для вычисления коэффициента *a* используется функция ОТРЕЗОК, коэффициента *b* – функция НАКЛОН.

**3. Коэффициент линейной корреляции**

Величина влияния фактора на исследуемый отклик может быть оценена при помощи **коэффициента линейной парной корреляции**, характеризующего тесноту (силу) линейной связи между двумя переменными.

Коэффициент можно определить по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-15.gif. | (6.4) |

Коэффициент обладает следующими свойствами:

1) не имеет размерности, следовательно, сопоставим для величин различных порядков;

2) изменяется в диапазоне от –1 до +1. Положительное значение свидетельствует о прямой линейной связи, отрицательное – об обратной. Чем ближе абсолютное значение коэффициента к единице, тем теснее связь. Считается, что связь достаточно сильная, если коэффициент по абсолютной величине превышает 0,7, и слабая, если он менее 0,3.

Значение коэффициента легко вычисляется при помощи *MS Excel* (функция КОРРЕЛ).

Величина r2 называется **коэффициентом детерминации**. Он определяет долю вариации одной из переменных, которая объясняется вариацией другой переменной.

**4. Множественная регрессия**

В тех случаях, когда необходимо оценить влияние нескольких факторов на исследуемую величину, строится уравнение множественной регрессии.

Если связь является линейной, то уравнение линейной множественной регрессии запишется в виде:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gifi = a0 + a1xi1 + a2xi2 + ... + amxim,   http://emm.ostu.ru/lect/images/pic3-15.gif |   |

где m - число учитываемых факторов (независимых переменных),

n - объем выборки.

Рассмотрим случай, когда *y* зависит от двух переменных – *x1* и *x2*.

Уравнение с оцененными параметрами будет иметь вид:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gifi = a0 + a1xi1 + a2xi2,  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic3-5.gif |   |

Чтобы определить значения коэффициентов a0, a1 и a2, воспользуемся методом наименьших квадратов.

Как и ранее, задача формулируется следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| Q = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-6.gif  =  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-16.gif  →  min. |   |

Приравяв частные производные нулю и выполнив преобразования, получим систему уравнений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic2-9.gif | na0 + a1http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi1 + a2http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi2 = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifyi,a0http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi1 + a1http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-17.gif + a2http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi1xi2 = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifyixi1,a0http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi2 + a1http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifxi1xi2 + a2http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-17.gif = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-10.gifyixi2. |

 |   |

Решив систему, можно получить формулы для расчета коэффициентов уравнения множественной линейной регрессии (a0, a1, a2).

Рассмотрим более общий случай - зависимость переменной *y* от *m* факторов.

Обозначим:

A = {aj}, j = 0, 1, 2, ..., m - вектор оценок параметров регрессии;

Y = {yi},  - вектор значений зависимой переменной;

X = {xij}, ,  j = 0, 1, 2, ..., m - матрица значений независимых переменных;

при этом *m* - количество независимых переменных, *n* - объем выборки.

Уравнение регрессии может быть представлено в следующим образом.

Для конкретного yi:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gifi = a0 + a1xi1 + a2xi2 + ... + amxim,   http://emm.ostu.ru/lect/images/pic3-15.gif | (6.5) |

или в матричном виде:

|  |  |
| --- | --- |
| Y = A ∙ X, |   |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| где X = | http://emm.ostu.ru/lect/images/pic5-1.gif | 1   x11   x12    ...     x1m1   x21   x22    ...     x2m           ...1   xn1   xn2    ...     xnm | http://emm.ostu.ru/lect/images/pic5-2.gif. |

 |  |

Обратите внимание на то, что в матрицу X дополнительно введен столбец, все элементы которого равны 1, т.е. условно полагается, что в уравнении (6.5) свободный член a0 умножается на фиктивную переменную xi0, принимающую значение 1 для всех *i*.

Можно показать, что для общего случая множественной линейной регрессии, коэффициенты уравнения могут быть определены из следующего соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
| A = (Xт∙X)-1∙Xт∙Y. | (6.6) |

**5. Сравнение коэффициентов регрессии**

Допустим, в результате анализа получено следующее уравнение регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
| y = 2,4 + 0,8x1 + 3,2x2. |   |

Если величины x1 и x2 являются соизмеримыми, то мы можем сопоставить влияние факторов x1 и x2 путем непосредственного сравнения соответствующих коэффициентов. В нашем примере можно сказать, что фактор x2 воздействует на *y* в четыре раза сильнее.

В тех случаях, когда x1 и x2 измеряются в разных величинах для сравнения степени их влияния прибегают к нормированию коэффициентов регрессии и определяют так называемый **бета-коэффициент** ():

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic5-14.gifj = aj ∙ http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-20.gif , | (6.7) |

где aj - соответствующий коэффициент уравнения регрессии;

,   - среднеквадратическое отклонение значений переменной xj (m – число учитываемых факторов);

  - среднеквадратическое отклонение значений переменной *y*.

Математически бета-коэффициент показывает, на какую часть величины среднеквадратического отклонения меняется среднее значение зависимой переменной с изменением независимой переменной на одно среднеквадратическое отклонение при фиксированном на постоянном уровне значении остальных независимых переменных.

Заметим, что некоторые авторы именуют бета-коэффициент *стандартизированным коэффициентом регрессии*.

Для целей сравнения коэффициентов регрессии (сравнения силы влияния каждого фактора на отклик) также может быть использован **коэффициент эластичности** (Э):

|  |  |
| --- | --- |
| Эj = aj ∙ http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-24.gif . | (6.8) |

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменяется зависимая переменная при изменении соответствующего фактора на один процент.

**6. Коэффициент множественной корреляции**

Экономические явления чаще всего адекватно описываются именно многофакторными моделями. Поэтому возникает необходимость обобщить рассмотренное выше корреляционное отношение (6.4) на случай нескольких переменных.

Теснота линейной взаимосвязи между переменной *y* и рядом переменных *xj*, рассматриваемых в целом, может быть определена с помощью **коэффициента множественной корреляции**.

Предположим, что переменная *y* испытывает влияние двух переменных - *x* и *z*. В этом случае коэффициент множественной корреляции может быть определен по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-25.gif. | (6.9) |

где ryx, ryz, rxz - простые коэффициенты линейной парной корреляции, определенные из соотношения (6.4).

Коэффициент множественной корреляции заключен в пределах 0 ≤ R ≤ 1. Он не меньше, чем абсолютная величина любого парного или частного коэффициента корреляции с таким же первичным индексом.

С помощью множественного коэффициента (по мере приближения R к 1) делается вывод о тесноте взаимосвязи, но не о ее направлении. Величина R2, называемая **множественным коэффициентом детерминации**, показывает, какую долю вариации исследуемой переменной (*y*) объясняет вариация остальных учтенных переменных (*x*, *z*).

**7. Коэффициент частной корреляции**

Иногда представляет интерес измерение частных зависимостей (между *y* и *xj*) при условии, что воздействие других факторов, принимаемых во внимание, устранено. В качестве соответствующих измерителей приняты **коэффициенты частной корреляции**.

Рассмотрим порядок расчета коэффициента частной корреляции для случая, когда во взаимосвязи находятся три случайные переменные – *x*, *y*, *z*. Для них могут быть получены простые коэффициенты линейной парной корреляции – ryx, ryz, rxz. Однако большая величина этого коэффициента может быть обусловлена не только тем, что *y* и *x* действительно связаны между собой, но и в силу того, что обе переменные испытывают сильное действие третьего фактора – *z*.

Коэффициент частной корреляции отличается от простого коэффициента линейной парной корреляции тем, что он измеряет парную корреляцию соответствующих признаков (*y* и *x*) при условии, что влияние на них третьего фактора (*z*) устранено.

Соответствующая расчетная формула:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-26.gif. | (6.10) |

Частный коэффициент корреляции, так же как и парный коэффициент корреляции r (рассчитанный по формуле (6.4)), может принимать значения от -1 до 1.

**8. Оценка параметров нелинейной регрессии**

Пусть предварительный анализ исходной информации дает основание предполагать, что регрессионная зависимость носит нелинейный характер. Пример корреляционного поля, соответствующего нелинейной зависимости, представлен на рисунке 6.5.



Рисунок 6.5 – Пример корреляционного поля (нелинейная зависимость)

Рассмотрим в качестве примера следующее уравнение регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gif = a0 + a1x1 + a2http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-27.gif + a3x2 + a4http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-28.gif . | (6.11) |

Пусть необходимо определить коэффициенты уравнения.

В этом случае, как правило, выполняют *линеаризующие преобразования переменных*.

Введем обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
| z1 = x1;  z2 = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-27.gif;  z3 = x2;   z4 = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-28.gif . |   |

Тогда исходное уравнение (6.11) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gif = a0 + a1z1 + a2z2 + a3z3 + a4z4 . | (6.12) |

Уравнение (6.12) представляет собой уравнение линейной регрессии с четырьмя независимыми переменными. Коэффициенты последнего уравнения находятся по уже известной нам формуле (6.6):

|  |  |
| --- | --- |
| A = (Zт∙Z)-1∙Zт∙Y. |   |

После нахождения коэффициентов необходимо выполнить обратные преобразования для возврата к исходным переменным.

**9. Индекс корреляции**

**Индекс корреляции** используется для выявления тесноты связи между переменными в случае нелинейной зависимости.

Он показывает тесноту связи между фактором x и зависимой переменной y:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-29.gif . | (6.13) |

где ei = yi - i - величина ошибки, т.е. отклонение фактических значений зависимой переменной от рассчитанных по уравнению регрессии.

Индекс корреляции есть неотрицательная величина, не превосходящая 1: 0 ≤ Iyx ≤ 1.

Связь тем сильнее, чем ближе Iyx к единице.

В случае линейной зависимости Iyx = | ryx |. Расхождение между Iyx (формула (6.13)) и ryx (формула (6.4)) может быть использовано для проверки линейности корреляционной зависимости.

**10. Проблема мультиколлинеарности**

При разработке структуры уравнения регрессии сталкиваются с явлением мультиколлинеарности. Под **мультиколлинеарностью** понимают взаимосвязь независимых переменных уравнения регрессии.

Пусть имеется уравнение регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gif = a0 + a1x1 + a2x2 . |   |

Переменные x1 и x2 могут находиться в некоторой линейной зависимости между собой. Эта зависимость может быть функциональной, тогда имеет место*строгая мультиколлинеарность* переменных. Чаще, однако, взаимосвязь между переменными не столь жестка и проявляется лишь приблизительно, в этом случае мультиколлинеарность называется *нестрогой*.

Одно из основных предположений метода наименьших квадратов заключается в том, что между независимыми переменными нет линейной связи. Нарушение этого условия будет приводить к тому, что получаемое уравнение регрессии будет ненадежным, и незначительное изменение исходных выборочных данных будет приводить к резкому изменению оценок параметров.

Для обнаружения мультиколлинеарности вычисляется матрица парных коэффициентов корреляции, охватывающая все сочетания независимых переменных. Коэффициенты, близкие по значению к ±1, свидетельствуют о наличии мультиколлинеарности между соответствующими переменными.

Устранение проблемы достигается путем пересмотра структуры уравнения регрессии.

Самый простой способ – исключение из модели одной из двух переменных, находящихся во взаимосвязи.

**11. Проверка адекватности модели регрессии**

Действия, выполняемые в данном случае, представляют собой *процесс (этап) верификации модели регрессии*, т.е. процесс, в ходе которого подвергается анализу качество полученной модели.

Допустим, имеется уравнение регрессии в линейном или нелинейном виде. Значения определяемые уравнением - i , тогда фактические значения можно представить как:

|  |  |
| --- | --- |
| yi = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gifi + ei , |   |

где ei - случайная (остаточная) компонента.

Анализ остаточной компоненты (остаточного ряда) позволяет оценить качество полученнного уравнения регрессии. Качество характеризуется выполнением определенных статистических свойств и точностью, т.е. степенью близости к фактическим данным. Модель считается хорошей со статистической точки зрения, если она адекватна и достаточно точна. Смысл используемых терминов характеризуют рисунки 6.6 и 6.7.

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/ris6-6.gif | http://emm.ostu.ru/lect/images/ris6-7.gif |
| Рисунок 6.6 – Пример модели регрессии(модель адекватна, но не точна) | Рисунок 6.7 – Пример модели регрессии(модель точна, но не адекватна) |

Оценить адекватность модели позволяет анализ случайной компоненты ei. Модель считается адекватной исследуемому процессу, если:

1) математическое ожидание значений остаточного ряда близко или равно нулю;

2) значения остаточного ряда случайны;

3) независимы;

4) подчинены нормальному закону распределения.

Таким образом, анализ адекватности модели разбивается на несколько этапов.

1. Равенство нулю математического ожидания ряда остатков означает выполнение следующего соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-30.gif |   |

Однако в случае применения метода наименьших квадратов такая проверка является излишней, поскольку использование МНК предполагает выполнение равенства , откуда безусловным образом следует равенство нулю математического ожидания значений остаточного ряда.

2. Проверка случайности последовательности ei проводится с помощью *критерия пиков (поворотных точек)*. Каждое значение ряда (ei) сравнивается с двумя, рядом стоящими. Точка считается поворотной, если она либо больше и предыдущего и последующего значения, либо меньше и предыдущего и последующего значения.

В случайном ряду должно выполняться строгое неравенство:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-32.gif, | (6.14) |

где p - число поворотных точек;

[ ] - целая часть результата вычислений.

3. При проверке независимости значений ei определяется отсутствие в остаточном ряду **автокорреляции**, под которой понимается корреляция между элементами одного и того же числового ряда. В нашем случае автокорреляция - это корреляция ряда e1, e2, e3 ... с рядом eL+1, eL+2, eL+3 ... Число L характеризует запаздывание (лаг). Корреляция между соседними членами ряда (т.е. когда L = 1) называется автокорреляцией первого порядка. Далее для остаточного ряда будем рассматривать зависимость между соседними элементами ei.

Значительная автокорреляция говорит о том, что спецификация регрессии выполнена неправильно (неправильно определен тип зависимости).

Наличие автокорреляции может быть выявлено при помощи *d-критерия Дарбина-Уотсона*. Значение критерия вычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-33.gif . | (6.15) |

Эта величина сравнивается с двумя табличными уровнями: нижним - d1 и верхним - d2. Соответствующая статистическая таблица приведена в [приложении A](http://emm.ostu.ru/lect/darbin.html). Если полученное значение *d* больше двух, то перед сопоставлением его нужно преобразовать:

|  |  |
| --- | --- |
| d' = 4 - d. |   |

Если d (или d') находится в интервале от нуля до d1 , то значения остаточного ряда сильно автокоррелированы.

Если значение d-критерия попадает в интервал от d2 до 2, то автокорреляция отсутствует.

Если d1 < d< d2 - однозначного вывода об отсутствии или наличии автокорреляции сделать нельзя и необходимо использовать другой критерий, например, коэффициент автокорреляции первого порядка:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-34.gif . | (6.16) |

Если |r(1)| окажется меньше табличного (при n<15 rтабл = 0,36), то гипотеза о наличии автокорреляции отвергается.

4. Соответствие остаточного ряда нормальному распределению проще всего проверить при помощи *RS-критерия*:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-35.gif , | (6.17) |

где emax - максимальное значение ряда остатков;

emin - минимальное значение ряда остатков;

 - среднеквадратическое отклонение значений остаточного ряда.

Если рассчитанное значение попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении принимается. Соответствующая статистическая таблица приведена в [приложении Б](http://emm.ostu.ru/lect/rs.html).

Для характеристики точности модели наиболее часто вычисляют среднюю относительную ошибку:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-37.gif . | (6.18) |

В отношении величины средней относительной ошибки, как правило, делают следующие выводы. Величина менее 5% свидетельствует о хорошем уровне точности, ошибка до 15% считается приемлемой.

**12. Построение точечных и интервальных прогнозов**

C помощью построенной регрессионной модели можно не только анализировать какой-либо процесс, но и прогнозировать значения зависимой переменной при каких-либо заданных значениях факторов.

Модель регрессии позволяет проводить как экстраполяцию, так и интерполяцию значений. *Интерполяция* - прогнозирование значений зависимой переменной*y* для значений фактора *x*, принадлежащих интервалу [xmin; xmax]. *Экстраполяция* - прогнозирование значений зависимой переменной *y* для значений фактора *x*, выходящих за границы интервала [xmin; xmax], чаще всего, при x > xmax.

Точечный прогноз получается путем простой подстановки соответствующих значений *x* в уравнение регрессии.

Зачастую значения факторов, для которых нужно сделать прогноз значения зависимой переменной, получают на основе среднего прироста значений фактора внутри выборочной совокупности:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-38.gif , | (6.19) |

где xmax и xmin - соответственно, максимальное и минимальное значение переменной *x* в выборочной совокупности.

При выполнении экстраполяции для определения конкретного значения *х*, используемого для расчета прогнозного значения *y*, можно использовать формулу:

|  |  |
| --- | --- |
| xk = xmax + http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-39.gif ∙ k , | (6.20) |

при прогнозе на один шаг k = 1, на два шага - k = 2 и т.д.

Подставляя полученное значение в уравнение регрессии, получим точечный прогноз величины *y*.

Однако вероятность точного "попадания" значения *y* в эту точку достаточно мала. Поэтому представляет интерес вычисление перспективных оценок значений*y* в виде доверительных интервалов.

Доверительные границы прогноза определяются по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| граница прогноза = http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-2.gifk ± Uk, | (6.21) |

где k - точечный прогноз величины *y*,

Uk - величина отклонения от точечного значения, соответствующая исследуемой точке xk и заданному уровню вероятности.

Величина Uk для линейной модели рассчитывается по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic6-40.gif . | (6.22) |

где S - среднеквадратическое отклонение значений остаточного ряда из формулы (6.17),

kp - табличное значение t-статистики Стьюдента (соответствующая статистическая таблица приведена в [приложении В](http://emm.ostu.ru/lect/student.html)) для заданной вероятности попадания прогнозируемой величины внутрь доверительного интервала.

И если построенная модель регрессии адекватна, то с выбранной вероятностью можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей функционирования изучаемой системы прогнозируемая величина попадет в интервал, образованный нижней и верхней границами.

**Лекция 7, 8.**

**1. Основные понятия метода экспертных оценок**

В случаях чрезвычайной сложности проблемы, ее новизны, недостаточности имеющейся информации, невозможности математической формализации процесса решения приходится обращаться к рекомендациям компетентных специалистов, прекрасно знающих проблему, - к экспертам. Их решение задачи, аргументация, формирование количественных оценок, обработка последних формальными методами получили название **метода экспертных оценок**.

**Эксперты** (от латинского *"expertus"* - опытный) – это лица, обладающие знаниями и способные высказать аргументированное мнение по изучаемому явлению.

Процедура получения оценок от экспертов называется **экспертизой**.

Метод экспертных оценок включает в себя три составляющие.

1. *Интуитивно-логический анализ задачи*. Строится на логическом мышлении и интуиции экспертов, основан на их знании и опыте. Этим объясняется высокий уровень требований, предъявляемых к экспертам.

2. *Решение и выдача количественных или качественных оценок*. Эта процедура представляет собой завершающую часть работы эксперта. Им формируется решение по рассматриваемой проблеме и дается оценка ожидаемых результатов.

3. *Обработка результатов решения*. Полученные от экспертов оценки должны быть обработаны с целью получения итоговой оценки проблемы. В зависимости от поставленной задачи изменяется количество выполняемых на этом этапе расчетных и логических процедур. Для обеспечения оперативности и минимизации ошибок на данном этапе целесообразно использование вычислительной техники.

В условиях недостаточно полной и недостоверной информации методы экспертных оценок дают вполне приемлемые результаты. В настоящее время, характеризующееся ускорением научно-технического прогресса, появлением новых проблем организационного, технического, экономического, социально-психологического плана, сфера применения метода расширяется.

Приведем некоторые примеры задач, при решении которых могут использоваться экспертные оценки:

 выбор вариантов технического и социально-экономического развития предприятия;

 отбор проектов при проведении тендеров;

 отбор заявок на получение грантов и разработку научных тем;

 формирование тематики НИР и ОКР;

 определение стратегических целей фирмы и т.п.

Для решения подобных задач могут использоваться различные формы проведения экспертизы:

 дискуссия;

 анкетирование;

 интервьюирование;

 «мозговой штурм»;

 совещание;

 деловая игра и др.

Иногда различные формы используются в комплексе.

Одной из наиболее перспективных форм проведения экспертного оценивания считается *метод Дельфы*.

Метод Дельфы - это набор процедур, выполняемых в определенной последовательности с целью формирования группового мнения о проблеме, характеризующейся недостаточностью информации для использования других методов.

Метод Дельфы - это метод группового анкетирования. Используемые процедуры характеризуются тремя основными чертами: анонимностью, регулируемой обратной связью и групповым ответом. Обратная связь осуществляется за счет проведения нескольких туров опроса, причем результаты каждого тура обрабатываются статистическими методами и сообщаются экспертам. Во втором и последующих турах эксперты аргументируют свои ответы. Таким образом, в последующих турах эксперты могут пересмотреть свои первоначальные ответы. От тура к туру ответы экспертов носят все более устойчивый характер и, в конце концов, перестают изменяться, что служит основанием для прекращения опросов.

Практика показывает, что обычно проводится три-четыре тура опросов, так как в дальнейшем оценки перестают изменяться.

**2. Этапы подготовки и проведения экспертизы**

Качество получаемых экспертных оценок в значительной степени определяется подготовкой экспертизы, а также применяемыми методами обработки информации, получаемой от экспертов.

***Единых правил подготовки и проведения экспертизы нет***.

Однако можно выделить основные этапы ее подготовки и проведения. К ним относятся:

 формулировка цели экспертного анализа;

 формирование группы организаторов экспертизы;

 разработка процедур проведения экспертной оценки;

 подбор экспертов;

 *получение экспертных оценок*;

 *обработка результатов опроса и анализ полученных данных*;

 установление степени достижения цели экспертизы.

С точки зрения изучаемой нами дисциплины наибольший интерес представляют два этапа: получение экспертных оценок, обработка результатов опроса и анализ полученных данных.

**3. Получение экспертных оценок. Понятие шкалы. Типы шкал**

Рациональное использование информации, получаемой от экспертов, возможно при условии преобразования ее в форму, удобную для дальнейшего анализа.

Формализация информации, получаемой от экспертов, должна быть направлена на подготовку решения таких задач, которые не могут быть в полной мере описаны математически.

Одна из главных трудностей при оценивании состоит в том, что помимо явлений, объектов, факторов, состояние которых может быть выражено количественно (в руб., $, кг, км, % и т.п.), приходится оценивать качественные факторы, уровень которых нельзя точно определить. Часть информации, не поддающуюся количественному измерению, необходимо представить в виде косвенных оценок.

Если эксперт способен сравнить и оценить какие-либо объекты, явления, факторы, варианты действий, приписав каждому из них какое-либо число, то говорят, что он обладает определенной *системой предпочтений*.

В зависимости от того, по какой *шкале* заданы эти предпочтения, экспертные оценки содержат больший или меньший объем информации и обладают различной способностью к математической формализации.

**Шкала** – это инструмент (принятая система правил) оценки (измерения) каких-либо объектов или явлений.

Различают четыре типа шкал.

***1. Номинальная шкала***. Реализует простейший тип измерения. В этом случае проводится сравнение свойств объекта (явления) с каким-либо признаком-эталоном, результатом является упорядочение по двухэлементной шкале, где каждому из объектов (явлений) присваивается балл, равный нулю либо единице.

Примером измерения по номинальной шкале может служить проведение зачета. В этом случае эксперт-преподаватель оценивает уровень знаний студентов и выносит решение: зачет (объекту-студенту присваивается балл, равный нулю) или незачет (объекту-студенту присваивается балл, равный единице).

***2. Порядковая шкала***. Цель состоит в упорядочении объектов (явлений), а точнее, в выявлении с помощью экспертов скрытой упорядоченности, которая, по предположению, присуща множеству объектов. Результатом оценки является решение о том, что какой-либо объект (явление) предпочтительнее другого в отношении какого-то критерия.

Примером может служить определение жюри победителей и призеров какого-либо конкурса. Здесь эксперты должны решить, что участник, занявший первое место, оказался предпочтительнее (с точки зрения целей конкурса) участника, занявшего второе место. Участник, занявший второе место, в свою очередь, признается лучшим по отношению к третьему и т.д.

***3. Интервальная шкала***. Оценка по данной шкале позволяет не только определить, что один объект (явление) предпочтительнее другого, но также определить: на сколько предпочтительнее. Нулевая точка и единица измерения выбираются при этом произвольно.

Ярким примером оценки по интервальной шкале является проведение экзамена. Здесь эксперт-преподаватель, оценивая уровень знаний студентов, должен не только решить, что один студент знает материал лучше другого, но сказать: на сколько лучше. Измерение фактически производится по шкале из четырех баллов ("неудовлетворительно", "удовлетворительно", "хорошо", "отлично"). При этом уровень знаний, соответствующий нулевому баллу (нулевая точка) не известен.

Измерение по интервальной шкале используется при выставлении экспертами-судьями оценок в таких видах спорта, как фигурное катание, прыжки в воду, художественная и спортивная гимнастика.

***4. Шкала отношения***. В данном случае предполагается, что известно абсолютное значение свойств объекта, т.е. известна истинная нулевая точка. Шкала используется для тех факторов, которые могут быть представлены количественно.

Например, при помощи такой шкалы эксперты могут оценить размер прибыли, которая может быть получена в результате реализации какого-либо проекта.

В зависимости от существа исследуемых объектов для их оценки могут быть использованы различные шкалы.

Такие факторы как затраты, прибыль, время могут быть оценены по *шкале отношения* или *интервальной шкале* (например, в рублях, днях, баллах).

Для оценки таких факторов как срок окупаемости или сравнительная эффективность может быть использована *интервальная* или *порядковая шкала*.

Качественные, например, социальные или политические факторы могут оцениваться по *порядковой* или *номинальной шкале*.

**4. Способы измерения объектов**

Перейдем к рассмотрению вопросов формирования экспертных оценок, а именно к рассмотрению способов (техники) измерения объектов.

В первую очередь нас будут интересовать способы измерения, позволяющие расположить объекты на порядковой или интервальной шкале, поскольку именно такой тип оценок чаще всего используется при проведении экспертизы. Это объясняется тем, что оценка по номинальной шкале предполагает лишь два варианта ответов - *ДА, НЕТ*. По шкале отношения измеряются факторы, имеющие количественный характер. Значения этих факторов часто можно получить расчетным путем без использования экспертных оценок.

Выделим способы измерения объектов, наиболее часто применяемые при оценке по порядковой или интервальной шкале: *ранжирование, парное сравнение, непосредственная оценка*.

1.***Ранжирование*** – это расположение объектов в порядке возрастания или убывания какого-либо присущего им свойства. Ранжирование позволяет выбрать из исследуемой совокупности факторов наиболее существенный.

Результатом проведения ранжирования является *ранжировка*.

Если имеется *n* объектов, то в результате их ранжирования j-ым экспертом каждый объект получает оценку xij – ранг, приписываемый i-му объекту j-ым экспертом.

Значения xij находятся в интервале от *1* до *n*. Ранг самого важного фактора равен *единице*, наименее значимого – числу *n*.

**Ранжировкой** j-го эксперта называется последовательность рангов x1j, x2j, …, xnj.

Достоинством метода является его простота, а недостатком - ограниченные возможности использования. При оценке большого количества объектов экспертам очень трудно строить ранжированный ряд, поскольку приходится учитывать множество сложных связей.

От этого недостатка свободен следующий метод.

2. ***Парное сравнение*** - это установление предпочтения объектов при сравнении всех возможных пар. Здесь не нужно, как при ранжировании, упорядочивать все объекты, необходимо в каждой из пар выявить более значимый объект или установить их равенство.

Парное сравнение можно проводить при большом числе объектов, а также в тех случаях, когда различие между объектами столь незначительно, что практически невыполнимо их ранжирование.

При использовании метода чаще всего составляется матрица размером *nxn*, где *n* – количество сравниваемых объектов. Общий вид матрицы парных сравнений представлен на рисунке 7.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Объекты** | 1 | 2 | ... | j | ... | n | http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-1.gif |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| ... |  |  |  |  |  |  |  |
| i |  |  |  |  |  |  |  |
| ... |  |  |  |  |  |  |  |
| n |  |  |  |  |  |  |  |

Рисунок 7.1 - Общий вид матрицы парных сравнений

При сравнении объектов матрица заполняется элементами aij следующим образом (может быть предложена и иная схема заполнения):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| aij= | http://emm.ostu.ru/lect/images/pic2-55.gif | 2, если объект i предпочтительнее объекта j (i > j),1, если установлено равенство объектов (i = j),0, если объект j предпочтительнее объекта i (i < j). |

 | (7.1) |

Сумма  (по строке) в данном случае позволяет оценить относительную значимость объектов. Тот объект, для которого сумма окажется наибольшей, может быть признан наиболее важным (значимым).

Суммирование можно производить и по столбцам (), тогда самым существенным будет фактор, набравший наименьшее количество баллов.

3. ***Непосредственная оценка***. Часто бывает желательным не только упорядочить (ранжировать объекты анализа), но и определить, на сколько один фактор более значим, чем другие.

В этом случае диапазон изменения характеристик объекта разбивается на отдельные интервалы, каждому из которых приписывается определенная оценка (балл), например, от 0 до 10.

Именно поэтому метод непосредственной оценки иногда именуют также *балльным методом*.

Смысл метода состоит в том, что эксперт помещает каждый из анализируемых объектов в определенный интервал (приписывает балл). Измерителем при этом является степень обладания объекта тем или иным свойством.

Число интервалов, на которые разбивается диапазон изменения свойства, может быть различным для разных экспертов. Кроме того, метод разрешает давать одну и ту же оценку (т.е. помещать в один и тот же интервал) различным объектам.

Например, метод непосредственной оценки используется при проведении экзаменов. Здесь диапазон, характеризующий уровень знаний студентов мысленно разбивается экспертом-преподавателем на интервалы, подобно тому, как показано на рисунке 7.2.



Рисунок 7.2 – Пример разбиения диапазона изменения характеристик объекта на интервалы

**5. Обработка результатов опроса экспертов**

Перейдем к рассмотрению процедур, выполняемых на этапе обработки результатов опроса.

На базе оценок экспертов получается обобщенная информация об исследуемом объекте (явлении) и формируется решение, задаваемое целью экспертизы. При обработке индивидуальных оценок экспертов используют различные количественные и качественные методы. Выбор того или иного метода зависит от сложности решаемой проблемы, формы, в которой представлены мнения экспертов, целей экспертизы.

Чаще всего при обработке результатов опроса используются методы математической статистики.

В зависимости от целей экспертизы при обработке оценок могут решаться следующие проблемы:

 [формирование обобщенной оценки;](http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html#vopros5.1)

 [определение относительных весов объектов;](http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html#vopros5.2)

 [установление степени согласованности мнений экспертов](http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html#vopros5.3) и др.

Далее рассмотрим некоторые методы решения каждой из перечисленных задач.

***5.1 Формирование обобщенной оценки***

Итак, пусть группа экспертов оценила какой-либо объект, тогда xj – оценка j-го эксперта, , где *m* – число экспертов.

Для формирования обобщенной оценки группы экспертов чаще всего используются средние величины. Например, ***медиана (ME)***, за которую принимается такая оценка, по отношению к которой число бoльших оценок равняется числу меньших.

Может использоваться также точечная оценка для группы экспертов, вычисляемая как ***среднее арифметическое***:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-4.gif | (7.2) |

***5.2 Определение относительных весов объектов***

Иногда требуется определить, насколько тот или иной фактор (объект) важен (существенен) с точки зрения какого-либо критерия. В этом случае говорят, что нужно определить ***вес*** каждого фактора.

Один из методов определения весов состоит в следующем. Пусть xij – оценка фактора *i*, данная j-ым экспертом, , , *n* – число сравниваемых объектов, *m* – число экспертов. Тогда вес i-го объекта, подсчитанный по оценкам всех экспертов (wi), равен:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-5.gif  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic3-15.gif | (7.3) |

где wij – вес i-го объекта, подсчитанный по оценкам j-го эксперта, равен:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-6.gif  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic3-15.gif  http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-7.gif | (7.4) |

***5.3 Установление степени согласованности мнений экспертов***

В случае участия в опросе нескольких экспертов расхождения в их оценках неизбежны, однако величина этого расхождения имеет важное значение. Групповая оценка может считаться достаточно надежной только при условии хорошей согласованности ответов отдельных специалистов.

Для анализа разброса и согласованности оценок применяются статистические характеристики – *меры разброса*.

***Вариационный размах (R)***:

|  |  |
| --- | --- |
| R = xmax - xmin, | (7.5) |

где xmax - максимальная оценка объекта;

xmin - минимальная оценка объекта.

***Среднее квадратическое отклонение***, вычисляемое по известной формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-8.gif | (7.6) |

где xj - оценка, данная j-ым экспертом;

m - количество экспертов.

***Коэффициент вариации (V)***, который обычно выражается в процентах:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-9.gif | (7.7) |

Специфичны подходы к проверке согласованности, используемые при оценке объектов [методом ранжирования](http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html#rang).

В этом случае результатом работы эксперта является ранжировка, представляющая собой последовательность рангов (для эксперта *j*): x1j, x2j, …, xnj.

Согласованность между ранжировками двух экспертов можно определить с помощью ***коэффициента ранговой корреляции Спирмэна***:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-10.gif | (7.8) |

где xij – ранг, присвоенный i-му объекту j-ым экспертом;

xik – ранг, присвоенный i-му объекту k-ым экспертом;

di – разница между рангами, присвоенными i-му объекту.

Величина  может изменяться в диапазоне от –1 до +1. При полном совпадении оценок коэффициент равен единице. Равенство коэффициента минус единице наблюдается при наибольшем расхождении в мнениях экспертов.

Кроме того, расчет коэффициента ранговой корреляции может применяться как способ оценки взаимоотношений между каким-либо фактором и результативным признаком (реакцией) в тех случаях, когда признаки не могут быть измерены точно, но могут быть упорядочены.

В этом случае значение коэффициента Спирмэна может быть интерпретировано подобно значению [коэффициента парной корреляции](http://emm.ostu.ru/lect/lect6.html#vopros3). Положительное значение свидетельствует о прямой связи между факторами, отрицательное - об обратной, при этом, чем ближе абсолютное значение коэффициента к единице, тем теснее связь.

Когда необходимо определить согласованность в ранжировках большого (более двух) числа экспертов, рассчитывается так называемый ***коэффициент конкордации*** – общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из *m* экспертов:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-11.gif | (7.9) |

где 

Заметим, что вычитаемое в скобках представляет собой не что иное, как среднюю сумму рангов (при суммировании для каждого объекта), полученных *i*объектами от экспертов.

Коэффициент W изменяется в диапазоне от 0 до 1. Его равенство единице означает, что все эксперты присвоили объектам одинаковые ранги. Чем ближе значение коэффициента к нулю, тем менее согласованными являются оценки экспертов.

Далее приведем примеры расчета коэффициентов  и W.

*Пример 7.1*. Пусть два эксперта приписали двенадцати факторам, влияющим на успешность реализации инновационного проекта, ранги, показанные в таблице 7.1.

На основе приведенных данных рассчитайте коэффициент ранговой корреляции Спирмэна.

*Решение.*

Рассчитаем коэффициент Спирмэна, используя формулу (7.8). Промежуточные результаты расчетов (di и di2) приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 - Исходные данные и промежуточные результаты расчетов примера 7.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Фактор** | **Ранги** | di | di2 |
| первый эксперт (xi1) | второй эксперт (xi2) |
| АБВГДЕЗЖИКЛМ | 782193121141065 | 641311212105978 | 141-2-2101-11-1-3 | 1161441011119 |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-1.gif |  |  |  | 40 |

Подставляя вычисленное значение в формулу (7.8), получим:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-13.gif |   |

Такое значение коэффициента Спирмэна свидетельствует о высокой согласованности оценок экспертов.

*Пример 7.2*. Пять экспертов проранжировали семь вариантов капиталовложений (соответствующие оценки приведены в таблице 7.2).

Проверьте согласованность ранжировок, используя коэффициент конкордации.

*Решение.*

Рассчитаем коэффициент конкордации, используя формулу (7.9). В таблице 7.2 приведены промежуточные результаты расчетов.

Таблица 7.2 - Исходные данные и промежуточные результаты расчетов примера 7.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Варианты** | **Эксперты** | Суммарангов | Отклонения отсредней суммы | Квадратотклонения |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| IIIIIIIVVVIVII | 1264735 | 1276354 | 2164753 | 3156472 | 1264573 | 883024262717 | -12-1210467-3 | 1441441001636499 |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-1.gif |  |  |  |  |  |  |  | 498 |

Подставляя вычисленное значение в формулу (7.9), получим:

|  |  |
| --- | --- |
| http://emm.ostu.ru/lect/images/pic7-14.gif |   |

Такая величина W позволяет сделать вывод о том, что существует неслучайная согласованность в мнениях экспертов.