Содержание 1.

Глава I
ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Модель — это представление объекта, системы или идеи в некоторой форме, отличной от самой целостности.

Р.Шеннон

1.1. Коротко о типах моделей

Не ставя перед собой задачи дать сколько-нибудь полную классификацию существующих моделей, коротко опишем некоторые их типы.

1.1.1. Физические модели

Так называют увеличенное или уменьшенное описание объекта или системы. Отличительная характеристика физической модели состоит в том, что в некотором смысле она выглядит как моделируемая целостность.

Наиболее известным примером физической модели является копия конструируемого самолета, выполненная с полным соблюдением пропорций, скажем 1:50. На одном из этапов разработки самолета новой конструкции возникает необходимость проверить его основные аэродинамические параметры. С этой целью подготовленную копию продувают в специальной (аэродинамической) трубе, а полученные показания затем тщательно исследуют. Выгодность такого подхода совершенно очевидна. И потому все ведущие самолетостроительные компании используют физические модели подобного рода при разработке каждого нового летательного аппарата.

Часто в аэродинамическую трубу помещают уменьшенные копии многоэтажных зданий, имитируя при этом розу ветров, характерную для той местности, где предполагается их строительство. Пользуются физическими моделями и в кораблестроении.

1.1.2Аналоговые модели

Так называют модели, представляющие исследуемый объект аналогом, который ведет себя как реальный объект, но не выглядит как таковой.

Приведем два достаточно характерных примера.

Пример 1. График, иллюстрирующий соотношения между затраченными усилиями и результатами, является аналоговой моделью. График на рис. 1 показывает, как количество времени, отведенное студентом на подготовку к экзамену, влияет на его результат.

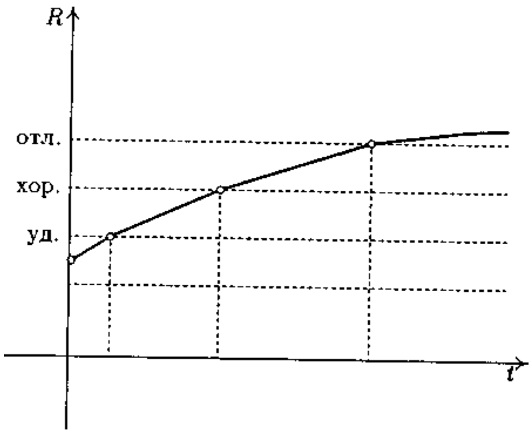


Рис. 1

Пример 2. Предположим, что нужно найти наиболее экономичный способ для регулярных известных поставок товаров в три города, построив для этого только один склад. Основное требование: место для склада должно быть таким, чтобы полные транспортные расходы были наименьшими (считается, что стоимость каждой перевозки равна произведению расстояния от склада до пункта назначения на общий вес перевозимых товаров и измеряется в тонно-километрах).

Наклеим карту местности на лист фанеры. Затем в месте нахождения каждого города пропилим сквозные отверстия, пропустим через них нити и привяжем к ним грузики, пропорциональные запросам товаров в этот город (рис. 2). Свяжем

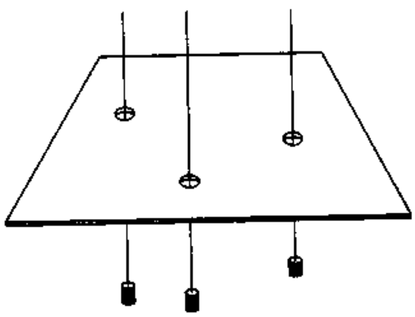


Рис. 2

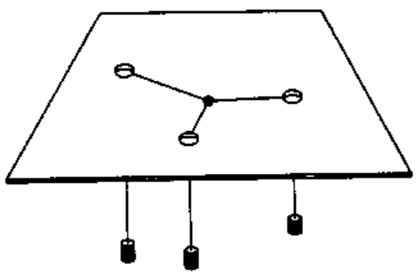


Рис. 3

свободные

Концы нитей в состояние равновесия. То место на листе фанеры, которое при этом займет узел, и будет соответствовать оптимальному расположению склада (рис. 3).

Замечание. Стоимость дорог, которые придется построить заново, мы для простоты рассуждений в расчет не принимаем.

1.1.3 Математические модели

Так называют модели, использующие для описания свойств и характеристик объекта или события математические символы и методы.

Если некоторую проблему удается перенести на язык формул, то она сильно упрощается. Математический подход прост еще и потому, что он подчиняется вполне определенным жестким правилам, которые нельзя отменить указом или иным способом. Сложность нашей жизни как раз и состоит в том, что многое, что в ней случается, нередко свободно от пут условностей.

Математика имеет дело с упрощенным описанием явлений. По существу, любая формула (или совокупность формул) представляет собой определенный этап в построении математической модели. Опыт показывает, что построить модель (написать уравнение) довольно легко. Трудно в этой модельной и, следовательно, упрощенной форме суметь передать суть изучаемого явления.

Для нахождения приемлемого или оптимального решения задачи полезно знать, в чем она состоит. Как ни просто и прозрачно данное утверждение, чересчур многие < ... > игнорируют очевидное (Р. Шеннон).

В предыдущих главах мы рассмотрели достаточное число разнообразных математических моделей, детерминированных, стохастических и игровых. В этой главе мы приведем примеры динамических моделей, на основании которых можно делать прогнозы на будущее и по-новому заглядывать в прошлое.

Итак, мы рассматриваем модели, в которые входят изменяющиеся во времени величины, уделяя основное внимание простейшим из них. Дело в том, что сами модельные уравнения (модели) строятся на основе простых и зачастую почти очевидных соображений. Именно анализ предлагаемых уравнений позволяет как-то оценить степень их адекватности описываемым ими обстоятельствам.

1.2. Модель народонаселения

Интересно, что построить математическую модель часто совсем нетрудно. Нередко для этого используются самые простые и легко объяснимые предположения.

Опишем, как это можно сделать, на одном почти реальном примере.

Представим себе следующую картину. Середина XVIII в. Центральная Европа. Приход в глубинке. Церковь. Прихожане — жители окрестных деревень. Приходский священник замечает, что храм стал тесноват для богослужений: возросло число прихожан. Священник размышляет: если число прихожан будет увеличиваться и в будущем, то придется строить новую церковь, для чего понадобятся средства, и немалые.

Священник понимает, что срок, за который должен быть построен храм, и его размеры во многом зависят от того, как именно будет изменяться число окрестных жителей. И он решает попытаться рассчитать это.

Попробуем и мы изложить возможный ход его рассуждений, пользуясь современными обозначениями и языком.

Обозначим через x_n количество прихожан к концу n-го года. Их численность через год, т. е. к концу (n + 1)-го года, естественно обозначить через x_{n+1}. Тогда изменение численности за этот год можно описать разностью

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

Оно происходит по двум естественным причинам — люди рождаются и умирают (для простоты будем считать, что вирус миграций эту местность тогда еще не поразил). Определить число родившихся и число умерших за год по приходским книгам особого труда не составляет. Подсчитывая число родившихся и умерших в разные годы, священник решает сопоставить полученные числа

$$b_1,...,b_k$$

и

$$d_1,...,d_k$$

с общим числом прихожан за эти годы

$$x_1,...,x_k$$

и замечает, что отношения

$$\frac{b_1}{x_1},...,\frac{b_k}{x_k}$$

год от года отличаются весьма мало. То же касается и отношений

$$\frac{d_1}{x_1},...,\frac{d_k}{x_k}$$

Для простоты расчетов будем считать эти отношения постоянными и обозначим их через α и β соответственно.

Тем самым, самым число родившихся в $n-м$ году оказывается равным

$$\alpha x_n,$$

число умерших

$$\beta x_n,$$

а изменение численности по естественным причинам составляет

$$+\alpha x_n - \beta x_n.$$

В результате мы приходим к соотношению

$$\Delta x_n = \alpha x_n - \beta x_n.$$

или подробнее:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n.$$

Положим

$$\gamma = 1 + \alpha - \beta.$$

Тогда интересующая нас формула примет вид

$$x_{n+1} = \gamma\ x_n.$$

Модель построена.

Попробуем теперь разобраться с тем, что же получилось, т. е. проанализировать построенную модель. Возможны три случая:

1) $\gamma > 1$ ($\delta = \alpha - \beta > 0$ — рождается больше, чем умирает) и численность прихожан растет год от года,

2) $\gamma = 1$($\delta = \alpha - \beta > 0$ — умирает столько же, сколько рождается и численность прихожан год от года остается неизменной,

3) $\gamma < 1$($\delta = \alpha - \beta < 0$ — умирает больше, чем рождается) и численность прихожан неуклонно снижается.

Так как побудительным мотивом для построения модели было желание узнать, как быстро будет расти число прихожан, начнем с рассмотрения случая 1.

Случай 1. Итак, численность прихожан растет. Но как, насколько быстро?

Здесь самое время кратко вспомнить поучительную историю (печальную притчу) о безвестном изобретателе шахмат.

Говорят, что игра очень понравилась богатому и всесильному магараджe, который тут же решил наградить изобретателя и щедро предложил выбрать вознаграждение ему самому. Тот, как рассказывают, смахнув фигуры с шахматной доски, положил на 1-ю клетку одно пшеничное зернышко, на 2-ю — два зернышка, на 3-ю — четыре зернышка, на 4-ю — восемь зернышек (рис. 4) и предложил магараджe, чтобы он отдал распоряжение слугам выкладывать зерна пшеницы на другие клетки шахматной доски по предложенному закону, т. е. так:

$$1,2,4,8,16,...,2^{63}.$$

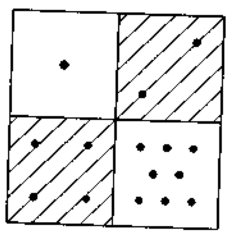


Рис. 4

Магараджу эта простая просьба почти обидела, и он согласился выполнить ее далеко не сразу. Но изобретатель настаивал. Магараджа приказал. И слуги тут же кинулись исполнять это "легкое" задание. Нужно ли говорить, что выполнить распоряжение магараджи им не удалось. Дело в том, что общее количество зерен пшеницы на шахматной доске должно было быть равным

$$2^{64}-1,$$

что намного превышает выращиваемое сейчас во всем мире за год. Закончим притчу совсем коротко: магараджа оказался в непривычном для себя положении — он прилюдно дал обещание и не смог его выполнить. Виновного, впрочем, тут же и нашли. Возможно, именно поэтому история и не сохранила имени изобретателя шахмат.

Попробуем, однако, изобразить на графике, как быстро растет число зерен в каждой следующей клетке, для большей наглядности соединяя соседние точки (рис. 5).

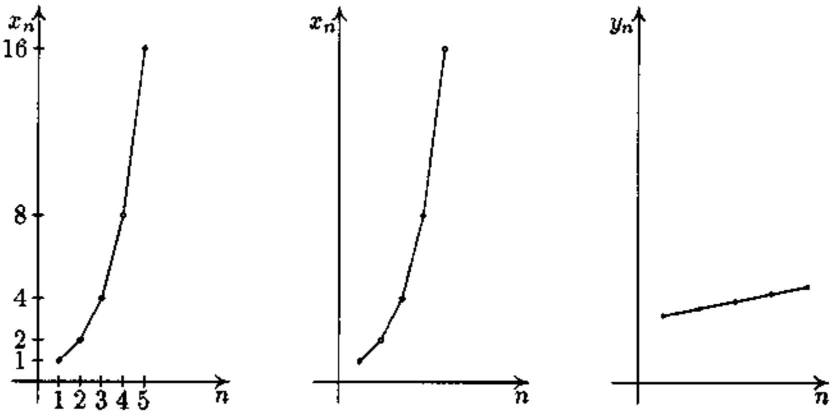


Рис. 5 *Рис. 6*

Правило, предложенное изобретателем шахмат,

$$x_{n+1} = 2x_n,$$

является частным случаем формулы (1) при $\gamma = 2$ и, так же как и она, описывает закон, следуя которому мы получаем последовательность чисел, образующих геометрическую прогрессию.

При любом $\gamma > 1$ картинка, иллюстрирующая изменение x_n, имеет похожий вид – x_n будет расти *экспоненциально.*

В 1820 г. в Лондоне Т. Р. Мальтусом была опубликована работа “Principles of political economy considered with a view to their practical application” (в русском переводе – "Опыт о законе народонаселения..." Т. 1-2. СПб., 1868), в которой, в частности, говорилось о >м, что в силу биологических особенностей людей население имеет тенденцию размножаться по закону геометрической прогрессии:

$$x_{n+1} = \gamma x_n, \qquad \gamma > 1,$$

то время как средства существования могут увеличиваться лишь > закону арифметической прогрессии:

$$y_{n+1} = y_n + d, \qquad d > 0.$$

Такое различие в скорости изменения величин, непосредственно вязанных с проблемами выживаемости популяции (рис. 6), не могло остаться незамеченным и вызвало довольно жесткую критику и сильно политизированную полемику в соответствующих кругах.

Попробуем извлечь из самого факта критики полезный для нас вод об адекватности построенной модели (1).

Разумеется, при попытке упрощенного описания ситуации некоторыми обстоятельствами приходится пренебрегать, считая их несущественными. Однако единого взгляда на то, что именно существенно, а что не очень, по-видимому, нет. Можно, например, не обращать внимания на то, что начался дождик. Но согласитесь, что одно дело пробежать под накрапывающим дождем сотню метров, и совсем другое – часовая прогулка под таким дождем без зонта.

Нечто аналогичное мы наблюдаем и здесь: при расчете на 3-4 года вперед формула (1) работает достаточно хорошо, но долгосрочный прогноз, основанный на ней, оказывается ошибочным.

Важный вывод. Предлагая построенную или выбранную вами модель, вы непременно должны указать пределы, в которых ею можно пользоваться, и предупредить о том, что нарушение этих ограничений может привести (и, скорее всего, приведет) к серьезным ошибкам. Коротко говоря, у каждой модели есть свой ресурс.

Покупая блузку или рубашку, мы привыкли к наличию меток, на которых указаны максимально допустимая температура глажения, дозволенные виды стирки и т.п. Это, конечно, ни в коей мере не означает, что вам запрещается, взяв докрасна раскаленный утюг, пройтись им раз-другой по ткани. Такое вы сделать можете. Но вот захотите ли вы носить блузку или рубашку после такого глажения?

Случай 2. Численность населения не изменяется (рис. 7).

Случай 3. Население вымирает (рис. 8).

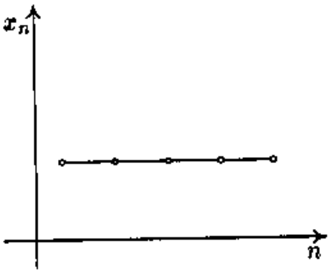


Рис. 7

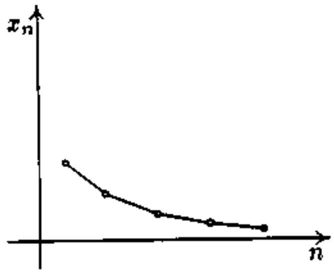


Рис. 8

Мы умышленно весьма подробно остановились на описании модели народонаселения, во-первых, потому, что она является одной из первых моделей подобного рода, и, во-вторых, чтобы на ее примере показать, через какие основные этапы проходит решение задачи построения математической модели.

Замечание 1. Очень часто, описывая эту модель народонаселения, привлекают ее дифференциальный вариант:

$$x'=\delta x$$

(здесь $x—x(t)$ — зависящая от времени численность популяции, x' — производная по времени, δ — постоянная величина).

Замечание 2. При больших значениях x конкурентная борьба за средства существования приводит к уменьшению δ, и эта жесткая модель должна быть заменена более мягкой моделью:

$$x'=\delta(x)x,$$

в которой коэффициент δ зависит от численности населения. В простейшем случае эта зависимость описывается так:

$$\delta(x)=a-bx,$$

где a и b — постоянные числа, а соответствующее уравнение принимает вид

$$x'=ax-bx^2.$$

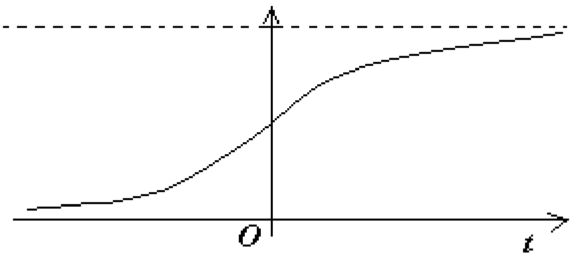


Рис. 9

И мы приходим к более сложной, так называемой *логистической* модели, которая описывает динамику популяции уже достаточно хорошо. Анализ логистической кривой (рис. 9) весьма поучителен, и его проведение может быть любопытно читателю.

Логистическая модель хорошо описывает и другие процессы, например эффективность рекламы.

1.3. Модель мобилизации

Под термином *политическая,* или *социальная, мобилизация* понимается вовлечение людей в партию или в число ее сторонников, в какое-либо общественное движение и т.п.

Вследствие того что текущий уровень мобилизации тесно связан с прошлым ее уровнем, а будущая мобилизация зависит от сегодняшних успехов пропагандистской кампании, ясно, что при построении соответствующей модели необходимо учитывать временной фактор. Иными словами, нужно понимать, что искомая модель должна быть *динамической.*

Постановка задачи

Отразить логику изменения уровня мобилизации в данном регионе аду двумя соседними моментами времени, скажем за месяц (за , неделю, день и т. п.).

Построение модели

Примем за единицу ту часть населения, для которой мобилизация данного типа имеет смысл. Пусть M_n — доля мобилизованного населения в момент времени $t_n = n$. Тогда доля немобилизованного населения будет равна $1 — M_n$ (рис. 10).

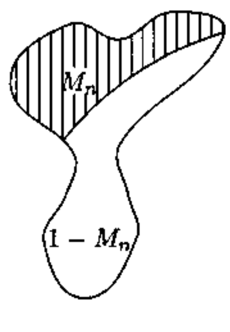


Рис. 10

За месяц уровень мобилизации может измениться по двум основным причинам:

1) часть населения удалось привлечь дополнительно; ясно, что эта величина тем больше, чем выше доля еще несагитированного населения на момент $t_n = n$, и поэтому можно считать ее равной

$$\alpha(1 - M_n)$$

(здесь $\alpha > 0$ — коэффициент агитируемости, постоянный для данного региона);

2) часть населения убыла (по разным причинам); ясно, что это уменьшает долю сагитированного населения тем больше, чем выше была эта доля на момент $t_n = n,$ и поэтому потери, связанные с выбытием, можно считать равными

$$\beta M_n$$

(здесь $\beta > 0$ — постоянный коэффициент выбытия).

Подчеркнем, что числовые параметры a и β отражают пропорциональное изменение интересов, взглядов и намерений соответствующих частей населения рассматриваемого региона.

Таким образом, изменение уровня мобилизации за единицу времени

$$\Delta M_n = M_{n+1} - M_n$$

равно разности между долей населения, привлеченного дополнительно, и долей выбывшего сагитированного населения:

$$M_{n+1} - M_n = \alpha(1 - M_n) - \beta M_n.$$

Это и есть *уравнение процесса мобилизации.* Модель мобилизации построена.

Последнее соотношение легко преобразуется к следующему виду:

$$M_{n+1} = \alpha + \gamma M_n, \qquad (2)$$

где

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta.$$

Замечание. Вспомогательный параметр γ не может быть больше 1 вследствие того, что исходные параметры α и β положительны.

Полученное уравнение (2) называется *линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами.*

С уравнениями подобного рода читатель, несомненно, уже не раз сталкивался, правда, по большей части в простейших вариантах.

Один из них (при $\gamma=1$) описывает правило, по которому каждый член последовательности, начиная со второго, получается из предыдущего путем сложения с некоторым постоянным числом:

$$M_{n+1} = \alpha + M_n,$$

т. е. *арифметическую прогрессию.*

Второй (при $a=0$) описывает правило, по которому каждый член последовательности, начиная со второго, получается из предыдущего путем умножения на некоторое постоянное число:

$$M_{n+1} = \gamma M_n$$

т. е. *геометрическую прогрессию.*

Предположим, что начальная доля привлеченного населения M_0 известна. Тогда уравнение (2) легко решается (для определенности считаем, что $\gamma \neq 1$). Имеем:

$$M_n = \alpha \frac{1-\gamma^n}{1-\gamma} + \gamma^n M_0.$$

Применение модели

Попробуем проанализировать возможности этой (построенной на основании простейших соображений) модели.

Начнем со случая $|\gamma| < 1$.

Для этого перепишем последнее соотношение в виде

$$M_n = M^* + \gamma^n (M_0 - M^*),$$

где через M^* обозначена следующая величина:

$$M^* = \frac{a}{1-\gamma}.$$

Замечание. Тот же результат получается, если в уравнении (2) положить

$$M_{n+1} = M_n = M^*.$$

В самом деле, тогда получим

$$M^* = \alpha + \gamma M^*,$$

откуда

$$M^* = \frac{a}{1-\gamma}.$$

Найденная величина M^* не зависит от начального значения M_0, выражается через исходные параметры α и β по формуле

$$M^* = \frac{a}{\alpha+\beta}$$

и, следовательно, подчинена условию

$$0<M^*<1.$$

Для придания полученной формуле большей наглядности воспользуемся методом координат.

На рис. 11 показаны области возможных значений вспомогательного параметра γ на рис. 12 — исходных параметров a и β, а на рис. 13-15 — соответствующие им наборы значений M_n при разных n, M_0 и M^* (для удобства восприятия соседние точки (n, M_n) и (n+ 1, M_{n+1}) соединены прямолинейными отрезками).

Случай $\gamma < -1$ проиллюстрирован на рис. 16.

Конечно, на этих рисунках представлена качественная картина. Но ничто не мешает взять вполне конкретные значения величин M_0, a и β и подробно рассчитать соответствующую ситуацию.

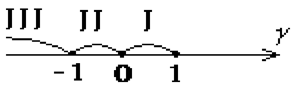


Рис.11

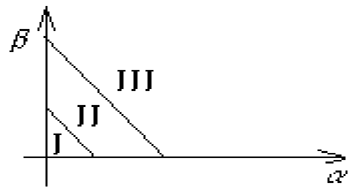


Рис.12

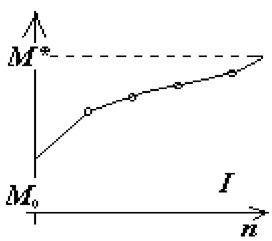


Рис.13

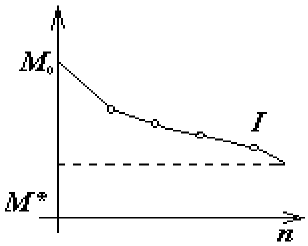


Рис.14

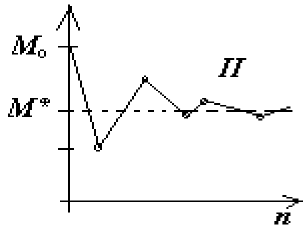


Рис. 15

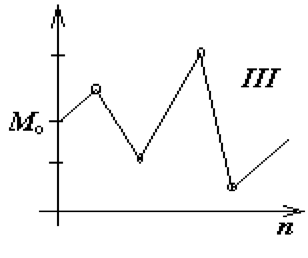


Рис. 16

Например, для $M_0 = \frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4}$

Имеем $M_1 = \frac{3}{8}, M_2 = \frac{7}{16}, M_3 = \frac{15}{32}, M_4 = \frac{31}{64}, \ldots$ (рис.17).

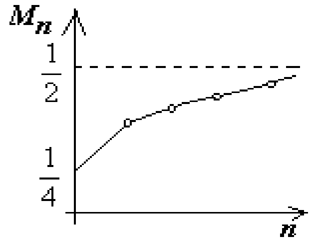


Рис.17

Интересно отметить, что построенная модель, несмотря на простоту подходов и рассуждений, довольно хорошо отражает реальные процессы. Так, предложенная модель мобилизации использовалась для изучении динамики числа голосов, поданных за демократическую партию в Лейк Кантри (США) в 1920-1968 гг., и оказалось, что она достаточно хорошо описывает качественные характеристики процесса мобилизации.

1.4. Модель гонки вооружений

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой могут оказаться две соседние страны, для определенности названные странами *X* и *Y*.

Обозначим через x=-$x(t)$ расходы на вооружение страны *X* и через $y = y(t)$ расходы на вооружение страны *Y* в момент времени $t \leq 0$.

Предположение 1

Страна *X* вооружается, опасаясь потенциальной угрозы войны со стороны страны *Y*, которая в свою очередь, зная о росте затрат на вооружение страны *X*, также увеличивает свои расходы на вооружение. Каждая страна изменяет скорость роста (или сокращения) вооружений пропорционально уровню затрат другой. В простейшем случае это можно описать так:

$$\begin{cases} x' = \alpha y, \\ y' = \beta x, \end{cases}$$

где a и β — положительные постоянные.

Однако написанные уравнения имеют очевидный недостаток – уровень вооружения ничем не лимитируется. Поэтому правые части этих уравнений нуждаются в естественной корректировке.

Предположение 2

Чем больше текущий уровень расходов страны на оборону, тем меньше скорость его роста. Это позволяет внести в предыдущую систему следующие изменения:

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x, \\ y' = \beta x - \delta y, \end{cases}$$

где a и β — положительные постоянные.

Предположение 3

Каждая страна наращивает вооружение, руководствуясь своими державными притязаниями и враждебностью к соседней стране, даже если эта страна не угрожает существованию данной. Обозначим соответствующие претензии через a и b (a и b – положительные постоянные). В случае если постоянные a и b отрицательны, их можно назвать коэффициентами доброй воли.

Основываясь на всех трех предположениях, в результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x + a, \\ y' = \beta x - \delta y + b. \end{cases}$$

Модель гонки вооружений построена.

Решением полученной системы являются функции $x(t)$ и $y(t)$, определяемые для данных начальных условий $x_0 \geq 0$ и $y_0 \geq 0$ (начального состояния гонки вооружений).

Проанализируем полученную систему, предполагая, что уровни затрат обеих стран на вооружение не зависят от времени (являются стационарными). Это означает, что

$$x'=0,\ y'=0,$$

или по-иному:

$$\begin{cases} \alpha y - \gamma x + a = 0, \\ \beta x - \delta y + b = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 3. Пусть система уравнений гонки вооружений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x' = 3y - 5x + 15, \\ y' = 3x - 4y + 12. \end{cases}$$

Если скорости изменения величин x и y равны нулю, то эти величины с необходимостью связаны условиями

$$(a): 3y - 5x + 15 = 0,$$

$$(б): 3x - 4y + 12 = 0.$$

Каждое из этих уравнений описывает прямую на плоскости (x, y), и точка пересечения этих прямых

$$M^*\left(\frac{96}{11}, \frac{105}{11}\right)$$

лежит в первой четверти (рис.18).

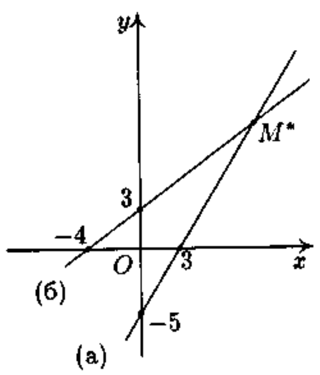


Рис. 18

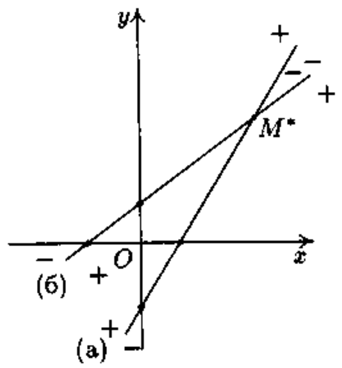


Рис. 19

Прямая, заданная уравнением (а), разбивает плоскость, и начальная точка O (0,0) лежит в положительной полуплоскости. В рассматриваемом случае то же справедливо и для прямой, заданной уравнением (б) (рис. 19).

Тем самым первая четверть (а нас интересует только она, так как всегда $x \geq 0$ и $y \geq 0$) разбивается на четыре области, которые удобно обозначить так

I – (+, +), II – (–, +), III – (–, –), IV – (+,–).

Пусть начальное состояние (x_0, y_0) находится в области I. Тогда выполнены неравенства

$$(a): 3y_0 - 5x_0 + 15 = 0,$$

$$(б): 3x_0 - 4y_0 + 12 = 0.$$

из которых следует, что скорости x' и y' в этой точке положительны и, значит, обе величины (x и y) должны возрастать (рис. 20).

Таким образом, с течением времени в области I решение приходит в точку равновесия.

Подобным же образом анализируя возможные расположения начального состояния в областях II, III и IV, получим в итоге, что стабильное состояние (баланс сил) достигается независимо от начальных уровней вооружения стран X и Y. Отличие состоит лишь в том, что если переход к стационарному состоянию из области I сопровождается одновременным увеличением уровней вооруженности,

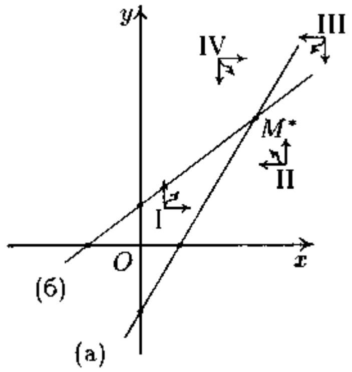


Рис. 20

то из области III — их одновременным снижением; для областей II и IV иная ситуация – одна из сторон наращивает свое вооружение, в то время как другая разоружается.

Возможны и другие случаи (рис. 21)

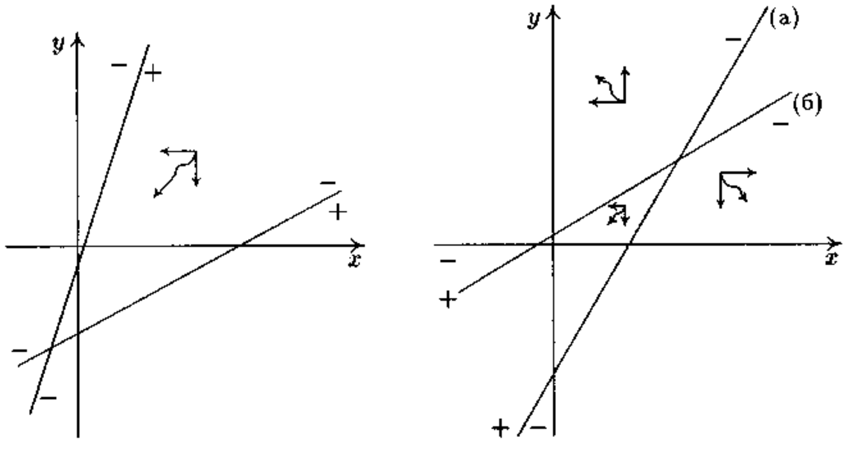


Рис. 21

Интересно отметить, что возможности построенной модели проверялись на реальной ситуации – гонке вооружений перед первой мировой войной. Проведенные исследования показали, что, несмотря на свою простоту, эта модель достаточно достоверно описывает положение дел в Европе в 1909-1913 гг.

В завершение этого раздела процитируем высказывание Т. Саати об этой модели: "Модель представляется гораздо более убедительной, если вместо вооружений провести на ней изучение проблем угрозы, поскольку люди реагируют на абсолютный уровень враждебности, проявляемый по отношению к ним другими, и испытывают чувство тревоги в степени, пропорциональной уровню враждебности, которую они испытывают сами".

1.5. Модель хищник - жертва

Выше рассказывалось о беспрепятственном размножении популяции. Однако в реальных обстоятельствах популяция сосуществует с другими популяциями, находясь с ними в самых разных взаимоотношениях.

Здесь мы коротко рассмотрим антагонистическую пару *хищник – жертва* (это может быть и пара рысь - заяц и пара божья коровка - тля) и попытаемся проследить, как может изменяться со временем численность обеих взаимодействующих сторон.

Популяция жертвы может существовать сама по себе, в то врем: как популяция хищника – только за счет жертвы.

Обозначим численность популяции жертвы через x, а численность популяции хищника через y.

В отсутствие хищника жертва размножается согласно уравнению.

$$x' = \alpha x, \qquad a > 0,$$

а хищник в отсутствие жертвы вымирает по закону

$$y' = -\beta y, \qquad \beta > 0.$$

Хищник съедает тем больше жертвы, чем ее больше и чем более многочислен он сам. Поэтому при наличии хищника численное:

$$x' = ax - \gamma xy, \qquad \gamma > 0.$$

Съеденное количество жертвы способствует размножению хищник что можно записать так

$$y' = -\beta y + \delta xy, \qquad \beta > 0.$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \gamma xy, \\ y' = -\beta y + \delta xy. \end{cases}$$

причем $x \geq 0, y \geq 0.$

Модель *хищник-жертва* построена.

Как и в предыдущей модели, наибольший интерес для нас представляет точка равновесия (x^*, y^*), где x^* и y^* – отличное от нуля решение системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha x - \gamma xy = 0, \\ -\beta y + \delta xy = 0. \end{cases}$$

или $x(\alpha - \gamma y) = 0, y(-\beta + \delta x) = 0.$

Эта система получается из условия стабильной численности обеих популяций $x'=0$, $y'=0$.

Координаты точки равновесия – она является точкой пересечения прямых

$$\begin{cases} \alpha - \gamma y = 0, & (3) \\ -\beta + \delta x = 0. & (4) \end{cases}$$

– легко вычисляются: $x^* = \dfrac{\beta}{\delta}, y^* = \dfrac{\alpha}{\gamma}$

(рис.22).

Начало координат $O(0,0)$ лежит в положительной полуплоскости относительно горизонтальной прямой, задаваемой уравнением (3), а относительно вертикальной прямой, задаваемой уравнением (4), — в отрицательной полуплоскости (рис. 23).

Тем самым первая четверть (а нас интересует только она, так как $x > 0$ и $y > 0$) разбивается на четыре области, которые удобно обозначить так:

I – (+, +), II – (–, +), III – (–, –), IV – (+,–).

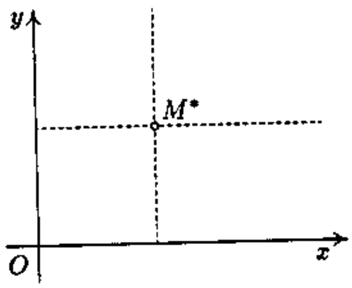


Рис. 22

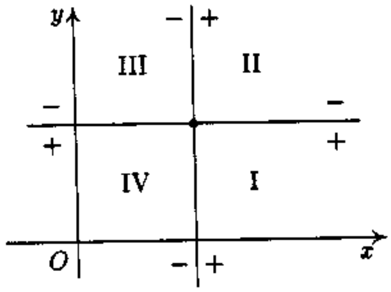


Рис. 23

Пусть начальное состояние $Q(x_0,\ y_0)$ находится в области IV. Тогда выполнены неравенства

$$\alpha - \gamma y > 0, \qquad -\beta + \delta x, 0,$$

из которых следует, что скорости x' и y' в этой точке должны быть разных знаков, $x' > 0, \qquad y' < 0,$

и, значит, величина x должна возрастать, а величина y убывать. Подобным же образом анализируя поведение x и y в областях III и IV, получим в итоге картину, изображенную на рис. 24.

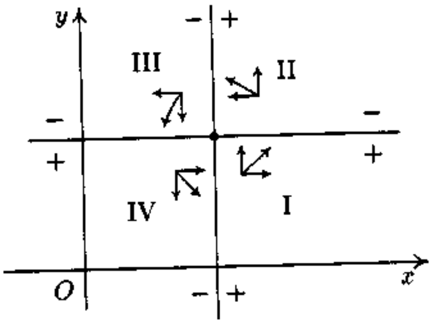


Рис. 24

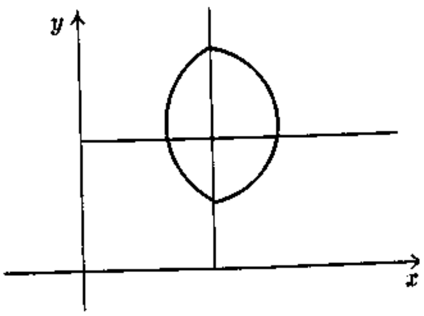


Рис. 25

Тем самым начальное состояние Q приводит к периодическому колебанию численности как жертвы, так и хищника, так что прошествии какого-то времени система вновь возвращается в состояие Q (рис. 25).

Как показывают наблюдения, несмотря на свою простоту, предложенная модель качественно верно отражает колебательный характер численности в системе хищник - жертва (рис. 26).

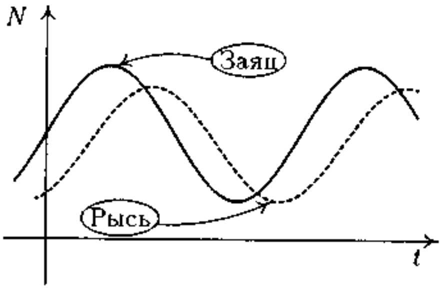


Рис. 26

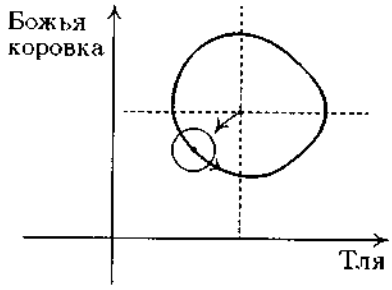


Рис. 27

Реальные наблюдения. Вмешиваться в действия непонятных нам законов природы иногда довольно опасно — применение инсектицидов (если только они не уничтожают насекомых практически полностью) в конечном счете приводит к увеличению популяции тех насекомых, численность которых находится под контролем других насекомых-хищников.

Случайно попавшая в Америку тля поставила под угрозу все производство цитрусовых. Вскоре туда же был завезен ее естественный враг – божья коровка, которая немедленно принялась за дело и сильно сократила популяцию тли. Чтобы ускорить процесс уничтожения, фермеры применили ДДТ, но в результате количество тли увеличилось, что, глядя на рис. 27, нетрудно предугадать.

1.6. Заключение

Построение модели опирается на значительное упрощение изучаемой ситуации, и. следовательно, к получаемым на ее основе выводам нужно относиться достаточно осторожно – модель может не все. Вместе с тем даже весьма грубая на вид идеализация нередко позволяет глубже вникнуть в суть проблемы. Пробуя как-то влиять на параметры модели (выбирать их, управлять ими), мы получаем возможность подвергнуть исследуемое явление качественному анализу и сделать выводы общего характера.

Глава II
ИЕРАРХИИ И ПРИОРИТЕТЫ

...Старинное изречение о том, что нельзя сравнивать яблоки и апельсины, неверно.

Т. Саати

2.1. Приоритеты

2.1.1. Измерения и согласованность

Предположим, что имеется некоторое семейство предметов (например, камней)

$$S_1,...,S_n$$

каждый из которых легок настолько, что его нетрудно удержать в руке, и требуется оценить их относительные веса в отсутствие взвешивающего прибора.

Среди возможных способов разрешения этой проблемы укажем два.

Первый состоит в том, чтобы определить (угадать) вес каждого предмета, взяв за единицу измерения (эталон) самый легкий, сравнить таким образом все предметы и, разделив затем найденный вес каждого Si на сумму весов всех n предметов, получить его относительный вес.

Это потребует $(n — 1)$ сравнений.

Второй способ состоит в сравнении весов всевозможных пар предметов: сначала мы сравниваем вес предмета S_1 *с* весами предметов $S_2,...,S_n$, затем вес предмета S_2 с весами предметов $S_3,..,S_n$ и т. д. до тех пор, пока у нас не сформируется суждение об относительном весе (отношении весов) для каждой пары предметов.

В этом случае общее число необходимых сравнений оказывается равным

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

При этом каждый предмет методично сравнивается со всеми остальными.

Конечно, второй способ требует большего времени, чем первый, но оказывается точнее.

Любым измерениям (в том числе и с использованием приборов) присущи ошибки (погрешности), серьезным следствием которых является то обстоятельство, что они могут привести (и нередко приводят) к несогласованным выводам.

Приведем совсем простой пример ошибочного сравнения: предмет *А* в 1,5 раза тяжелее предмета *В,* который в свою очередь в 1,5 раза тяжелее предмета С, последний же по весу почти не отличается от предмета *А.*

Согласованность измерений является весьма важной их характеристикой.

При этом под *согласованностью* при сравнении предметов по весу подразумевается не просто результат типа:

если *А* тяжелее *В* и *В* тяжелее *С, то А* тяжелее *С,*

а количественно более точный:

если А в 2 раза тяжелее *В,* а *В* в 3 раза тяжелее С, тоАв2-3=6 раз тяжелее *С.*

Замечание 1. Как правило, чем лучше человек знаком с ситуацией, тем более он последователен в своих суждениях. Хотя обратное и необязательно верно — отличная согласованность в суждениях вовсе не означает, что человек хорошо разбирается в ситуации.

Замечание 2. Попарные сравнения позволяют повысить согласованность оценок.

Проблема сравнения возникает повсюду — и при измерении физических величин, и при оценке совершенных поступков.

Для получения хороших результатов в сравнениях требуется уметь:

1) находить подходящую численную шкалу сравнений,

2) определять степень несогласованности наших суждений.

Начнем с обсуждения вопроса о том, как можно оценить согласованность наших суждений практически. А затем поговорим и о шкалировании.

2.1.2. Идеальные измерения

Пусть нам предложено сравнить веса камешков

$$S_1,...,S_n$$

Рассмотрим идеальную ситуацию, предположив, что в нашем распоряжении их идеально точные веса. Обозначим эти веса через

$$\omega_1,...,\omega_n$$

соответственно.

Отношение

$$a_{ik} = \frac{\omega_i}{\omega_k}, \qquad i,k = 1,...,n,$$

показывает в сколько раз вес $i-го$ камешка больше веса $k-го$ камешка S_k.

Например, если $\omega_1 = 305$ и $\omega_2 = 244$ г, то отношение

$$a_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{305}{244} = 1{,}25$$

Говорит о том, что камешек S_1 в 1,25 раза тяжелее камешка S_2

Запишем отношения (1) в виде квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \frac{\omega_1}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{\omega_2}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_2}{\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \frac{\omega_n}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{pmatrix}$$

и проанализируем некоторые свойства этой *идеальной матрицы сравнений.*

1. Для любого i справедливо равенство $a_{ii} = 1$ (элемент матрицы **A**, расположенный на пересечении $i-ой$ строки и $i-го$ столбца равен единице).

В самом деле,

$$a_{ii} = \frac{\omega_i}{\omega_i} = 1.$$

2. Для любых i и k справедливо равенство $a_{ki} = \frac{1}{a_{ik}}$ (произведение элементы матрицы **A**, расположенного на пересечении k-й строки и i-го столбца равно единице).

В самом деле, из того, что

$$a_{ki} = \frac{\omega_k}{\omega_i}, \text{ и } a_{ik} = \frac{\omega_i}{\omega_k}, ,$$

следует равенство

$$a_{ki}a_{ik} = \frac{\omega_k}{\omega_i} \cdot \frac{\omega_i}{\omega_k} = 1.$$

3. Для любых i,k и l справедливо равенство $a_{ki}a_{kl} = a_{il}$ (изведение элемента матрицы **A**, расположенного в $i - ой$ строке b$k - м$ столбце, на элемент матрицы **A**, расположенный в $k - ой$ строке и $l - м$ столбце, равно элементу матрицы A, расположенному в $i - ой$ строке и $l - м$ столбце).

В самом деле,

$$a_{ki}a_{kl} = \frac{\omega_i}{\omega_k} \cdot \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{\omega_i}{\omega_l} = a_{il}.$$

4. Столбец

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

является собственным столбцом матрицы **A** с собственным значением $\lambda = n$.

В самом деле,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \frac{\omega_1}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{\omega_2}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_2}{\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \frac{\omega_n}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega_1 \\ n\omega_2 \\ \dots \\ n\omega_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{pmatrix} = nw$$

2.1.3. Обратно-симметричные и согласованные матрицы

Рассмотрим теперь квадратную положительную матрицу порядка *n*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица **A** называется *обратно-симметричной,* если для любых i и k выполняется соотношение

$$a_{ki} = \frac{1}{a_{ik}}.$$

Из этого, в частности, следует, что

$$a_{ii} = 1$$

Матрица **A** является соглоасованной, если для любых i,k и l имеет место равенство $a_{ki}a_{kl} = a_{il}$.

Тем самым, идеальная матрица сравнений — обратно-симметричная и согласованная.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Положительная обратно-симметричная матрица является согласованной тогда и только тогда, когда порядок матрицы и ее наибольшее собственное значение совпадают:*

2.1.4 Индекс согласованности

Если элементы положительной обратно-симметричной согласованной матрицы **A** изменить незначительно («пошевелить»), то максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ также изменится незначительно.

Пусть **A** — произвольная положительная обратно-симметричная матрица и $\lambda_{\max}$ — ее наибольшее собственное значение.

Если

$$\lambda_{\max} = n,$$

то матрица **A** — согласованная.

Если

$$\lambda_{\max} \neq n$$

(всегда $\lambda_{\max} \geq n$), то в качестве степени отклонения положительной обратно-симметричной матрицы **A** от согласованной можно взять отношение

$$\frac{\lambda_{\max} - n}{n-1},$$

которое называется *индексом согласованности* (ИС) матрицы **A** и является показателем близости этой матрицы к согласованной.

Замечание, Считается, что если ИС не превышает 0,10, то можно быть удовлетворенным степенью согласованности суждений.

2.1. 5. Вычисление собственных характеристик обратно-симметричной матрицы

Довольно естественно встает вопрос о том, как находить наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ положительной обратно-симметричной матрицы.

Для n=2 такую задачу решать мы умеем. Правда, это не так интересно: обратно-симметричная матрица 2-го порядка всегда согласованная.

В самом деле, пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/a & 1 \end{pmatrix}$$

— обратно-симметричная матрица. Найдем ее собственные значения. Имеем

$$(1-\lambda)^2 = 1.$$

Отсюда $\lambda = 2$ и $\lambda = 0$.

Однако в общем случае эта задача хотя и разрешима, но технически достаточно сложна. Поэтому, желая содержательно, но относительно просто ответить на поставленный вопрос, мы вынуждены чем-то поступиться. Проще всего поступиться точностью вычислений, т. е. искать приближенное значение наибольшего собственного числа.

Для этого поступают так: сначала приближенно строится собственный столбец, а затем по нему ищется приближенное собственное значение.

Опишем несколько способов приближенного вычисления собственного столбца.

1-й способ:

1) суммируем элементы каждой строки и записываем полученные результаты в столбец,

2) складываем все элементы найденного столбца,

3) делим каждый из элементов этого столбца на полученную сумму.

2-й способ:

1) суммируем элементы каждого столбца и записываем полученные результаты в столбец,

2) заменяем каждый элемент построенного столбца на обратный ему,

3) складываем элементы столбца из обратных величин,

4) делим каждый из этих элементов на полученную сумму.

3-й способ:

1) суммируем элементы каждого столбца,

2) делим элементы каждого столбца на их сумму,

3) складываем элементы каждой строки полученной матрицы,

4) записываем результаты в столбец,

5) делим каждый из элементов последнего столбца на порядок исходной матрицы n.

4-й способ:

1) перемножаем элементы каждой строки и записываем полученные результаты в столбец,

2) извлекаем корень n-й степени из каждого элемента найденного столбца,

3) складываем элементы этого столбца,

4) делим каждый из этих элементов на полученную сумму.

Каждый из этих четырех способов, будучи примененным к идеальной матрице, приводит к одному и тому же точному результату.

Покажем это для 1-го случая (для остальных трех проверка проводится столь же просто).

Пусть

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \dots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \dots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{pmatrix}$$

— идеальная матрица.

Просуммируем элементы каждой строки матрицы (2) и, за полученные результаты в столбец

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} + & \dots & + \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} + & \dots & + \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} \\ \dots \\ \omega_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} \end{pmatrix},$$

сложим элементы этого столбца. Имеем:

$$\omega_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} + \dots + \omega_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} = (\omega_1 + \dots + \omega_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k}.$$

Поделим каждый из элементов столбца (3) на найденную суд результате получим

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\omega_1}{\omega_1 + \ldots + \omega_n} \\ \ldots \\ \dfrac{\omega_n}{\omega_1 + \ldots + \omega_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_1 + \ldots \omega_n} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \ldots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что итогом этих операций будет собственный столбец матрицы (2), сумма элементов которого равна единице. Легко убедиться и в том, что соответствующее собственное значение равно *n.*

В применении к обратно-симметричной, но не согласованной матрице ни один из предложенных способов уже не дает собственного столбца. Тем не менее при вычислении собственных столбцов матриц мы будем пользоваться именно этими способами, получая результате приближенные собственные столбцы.

Сложность вычислений возрастает с увеличением номера способа но увеличивается и точность.

Замечание. Описанные способы приближенного вычисления венного столбца матрицы эффективны лишь для обратно-симметричных матриц, достаточно близких к согласованным. ***Пример 1.*** Рассмотрим обратно-симметричную матрицу 4-го порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим приближенно ее собственный столбец всеми четырьмя способами.

1-й способ (указаны результаты каждого шага):

$$1)\ \begin{pmatrix} 19{,}00 \\ 11{,}20 \\ 5{,}42 \\ 1{,}56 \end{pmatrix}, \quad 2)\ 37{,}18, \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 0{,}51 \\ 0{,}30 \\ 0{,}15 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

2-й способ (указаны результаты каждого шага):

$$1)\ \begin{pmatrix} 1{,}51 \\ 6{,}43 \\ 11{,}25 \\ 18{,}00 \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 0{,}66 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad 3)\ 0{,}97 \qquad 4)\ \begin{pmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}.$$

3-й способ:

в результате 1-го и 2-го шагов получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}78 & 0{,}53 & 0{,}39 \\ 0{,}13 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}33 \\ 0{,}11 & 0{,}04 & 0{,}09 & 0{,}22 \\ 0{,}09 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}06 \end{pmatrix},$$

в результате 3-го и 4-го шагов получим столбец

$$\begin{pmatrix} 2{,}36 \\ 0{,}98 \\ 0{,}46 \\ 0{,}20 \end{pmatrix}$$

и окончательно

$$\begin{pmatrix} 0{,}590 \\ 0{,}245 \\ 0{,}115 \\ 0{,}050 \end{pmatrix}.$$

4-й способ (окончательный результат):

$$\begin{pmatrix} 0{,}61 \\ 0{,}24 \\ 0{,}10 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

Точный метод построения собственного столбца заданной матрицы дает следующий результат:

$$\begin{pmatrix} 0{,}61 \\ 0{,}24 \\ 0{,}10 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Итак, собственный столбец найден. Теперь остается найти соответствующее собственное значение.

Покажем, как это делается в данном случае.

Как уже отмечалось в гл.3, если мы хотим проверить, является ли предъявленный столбец **x** собственным столбцом матрицы **A**, следует поступать так:

1) умножить матрицу **A** на этот столбец:

$$\mathbf{Ax{=}y},$$

или подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

2) разделить элементы полученного столбца **y** на соответствующие элементы столбца **x**:

$$\frac{y_1}{x_1}, \dots, \frac{y_n}{x_n},$$

и если

$$\frac{y_1}{x_1} = \dots = \frac{y_n}{x_n},$$

то это отношение и есть собственное значение матрицы **A**, отвечающее данному столбцу **x**. Если же хотя бы одно из равенств (4) нарушается, то столбец **x** не является собственным столбцом матрицы **A**.

В данном случае столбец, получаемый любым из описанных выше четырех способов, мы заранее рассматриваем как приближение собственного столбца, и ожидать выполнения даже одного из равенств (4) нельзя.

Поэтому здесь мы поступим по-иному — считая каждое из отношений

$$\frac{y_1}{x_1} \dots \frac{y_n}{x_n},$$

приближением к искомому собственному значению, выберем в качестве собственного значения их среднее арифметическое:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}.$$

Продолжение примера 1. Для отыскания приближенного значения наибольшего собственного числа заданной матрицы используем приближение собственного столбца, вычисленное по 2-му способу. Умножив матрицу на соответствующий столбец, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}48 \\ 1{,}01 \\ 0{,}25 \\ 0{,}21 \end{pmatrix}.$$

Поделив элементы найденного столбца-произведения на соответствующие элементы исходного столбца-сомножителя, получим следующие числа:

3,59, 6,31, 2,78, 3,50.

Найдем их среднее арифметическое. Имеем:

$$\frac{1}{4}(3{,}59 + 6{,}31 + 2{,}78 + 3{,}50) = \frac{16{,}18}{4} = 4{,}05.$$

Тем самым,

$$\lambda_{\max} = 4{,}05.$$

Теперь уже совсем легко найти:

$$ИС = \frac{4{,}05 - 4}{4 - 1} = \frac{0{,}05}{3} = 0{,}017.$$

Для точного собственного столбца

$$\lambda_{\max} = 4{,}5\,.$$

3-й способ дает значение

$$\lambda_{\max} = 4{,}39$$

более близкое к точному. Правда в этом случае $ИС = 0{,}13$.

2.1.6. Шкалирование

Количественные оценки, вводимые при парных сравнениях, исходя из некоторых эмпирических правил, опирающихся шаткое основание опыта. Тем не менее, приобретенное опытным путем удивительным образом оказывается полезным во многих, совершенно непохожих ситуациях.

При любом подходе к разрешению задачи сравнения важное значение имеет выбор шкалы сравнений. Главное требование — сравнений должна быть проста и естественна.

Вот некоторые соображения, обосновывающие наш выбор

Начнем с диапазона. Использование шкалы парных сравнений пределах от 0 до ∞ может оказаться бесполезным. Дело в том, что наша способность различать находится в весьма ограниченном диапазоне и, когда есть значительная несоразмерность между сравниваемыми объектами, действиями или обстоятельствами, наши предположения тяготеют к тому, чтобы быть произвольными, и оказываются далекими от действительности.

Так как единица является стандартом измерения, то верхняя граница должна быть не слишком далека от нее, хотя и достаточно отдалена для того, чтобы более или менее выразительно представить наш диапазон способности различать.

Поэтому и число сравниваемых объектов должно быть достаточно мало. Обычные пределы — это 7 ± 2.

Почему же выбираются числа от 1 до 9?

Вот только некоторые из возможных объяснений.

1. Способность человека производить качественные разграничения хорошо представлена пятью определениями: *слабый, сильный, очень сильный, абсолютный.* Для большей точности но пользоваться промежуточными определениями.

2. Классификация по трем основным зонам — *неприятие. безразличие, приятие,* каждая из которых делится на низкую, уме и высокую степени.

3. Психологический предел 7 ± 2 предметов при одновременном сравнении подтверждает, что если взять 7 ± 2 отдельных предметов, близких относительно свойства, используемого для сравнения, то требуется 9 точек, чтобы их различить.

Замечание. Здесь уместно упомянуть и о принятой в отечественном образовании системе оценок 3, 4 и 5 с ее градациями 3±, 4± и 5±.

Опишем один из способов того, как практически придать количественное наполнение сравнению объектов, действий или обстоятельств и построить соответствующую таблицу сравнений.

Пусть даны элементы *A, B, C, D ж* т. д.

Таблица сравнений, имеющая вид

	A	***B***	***C***	***D***	**.**	**.**	**.**
A							
B							
C							
D							
.							
.							
.							

строится по следующим правилам:
если *A и B* одинаково важны, заносим в позицию *(A, B)* таблицы сравнений число 1,
если *A* незначительно важнее *B* •— число 3,
если *A* значительно важнее *B* — число 5,
если *A* явно важнее *B* — число 7,
если *A* по своей значимости абсолютно превосходит *B* — число 9.

Числа 2, 4, 6 и 8 используются для облегчения компромиссов между оценками, слегка отличающимися от основных чисел.

Рациональные дроби используются в случае, когда желательно увеличить согласованность всей матрицы при малом числе суждений.

Пример 2. Предположим, что, сравнивая объекты А, *B, C* и *D,*

мы получили таблицу сравнений

	A	***B***	***C***	***D***
A	1	5	6	7
B	1/5	1	4	6
C	1/6	¼	1	4
D	1/7	1/6	¼	1

которая приводит к обратно-симметричной матрице, рассмотренной выше.

Пользуясь одним из способов приближенного вычисления собственных элементов этой матрицы (для определенности вторым) нашли и собственный столбец, и собственное значение, и ИС:

$$\begin{pmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}, \lambda_{\max} = 4{,}05, \quad ИС = \frac{4{,}05-4}{4-1} = \frac{0{,}05}{3} = 0{,}017.$$

Сумма всех элементов полученного собственного столбца (его называют *столбцом приоритетов)* равна 1. Он позволяет подвести итог проведенному анализу таблицы сравнений:

среди сравниваемых элементов *A, B, C* и *D* наивысший приоритет имеет *A* (68%), затем идут *B* (16%), *C* (9%) и *D* (6%) соответственно.

2.2. Иерархии

Очень часто при анализе интересующей нас структуры числе элементов и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность исследователя воспринимать информацию в полном объеме. В таких случаях система делится на подсистемы. Одним из таких делений является иерархическое.

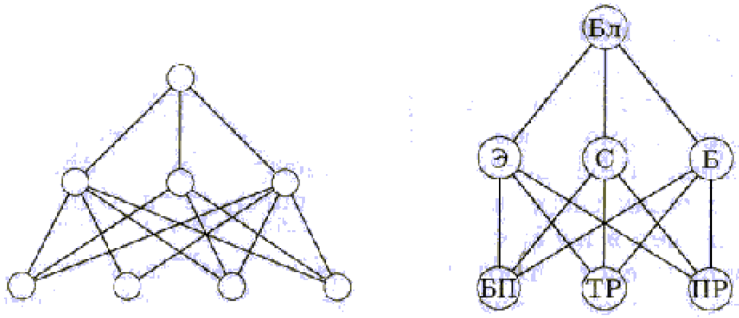
Иерархии представляют собой определенный вид системы, основанный на предположении, что ее элементы могут группироваться в *не связанные* множества. При этом элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой другой вполне определенной группы и в свою очередь оказывают влияние на элементы третьей группы. Мы считаем, что элементы в каждой группе в иерархии, называемой *уровнем,* независимы.

Первым требованием при анализе функционирования системы является построение иерархии, воспроизводящей функциональные отношения. Для этого сначала перечисляются все элементы, относящиеся к иерархии. Затем они распределяются по группам в соответствии с влиянием между группами. Так возникают уровни иерархии. Определяются цели, ради которых изучается задача, и строится иерархия.

После того как уровни иерархии заданы, составляются матрицы попарных сравнений между этими элементами относительно каждого элемента следующего, более высокого уровня, который служит критерием при сравнении.

Приведем пример типичной иерархии (рис. 1). Первый уровень иерархии имеет одну цель: общее благосостояние страны. Второй уровень иерархии имеет три цели: сильную экономику, здравоохранение, национальную оборону. Приоритеты этих целей получаются из матрицы попарных сравнений относительно цели первого уровня. Целями третьего уровня являются отрасли промышленности.

Задача заключается в определении влияния отраслей промышленности на общее благосостояние страны через промежуточный второй уровень. Поэтому приоритеты отраслей промышленности относительно каждой цели второго уровня получаются из матриц попарных сравнений относительно этих целей, а полученные столбцы приоритетов взвешиваются затем при помощи столбца приоритетов второго уровня, что позволяет получить в итоге искомый составной столбец приоритетов отраслей промышленности.



Пример 3 (распределение энергии). Предположим, что нам необходимо разрешить проблему распределения энергии в некоторой развитой стране между тремя ее крупнейшими пользователями: бытовым потреблением (БП), транспортом (ТР) и промышленностью (ПР). Они составляют третий, или низший, уровень иерархии. Целями, по отношению к которым оцениваются эти потребители, являются вклад в развитие экономики (Э), вклад в качество окружающей среды (С) и вклад в национальную безопасность (Б). Цели составляют второй уровень иерархии. Общая цель — благоприятное социальное и политическое положение (Бл) — первый уровень иерархии (рис. 2).

Построим матрицу попарных сравнений трех целей: Э, С и Б в соответствии с их воздействием на общую цель — Бл. Умышленно но навязывая согласованность создаваемой матрице, мы по первой строке находим все остальные ее элементы. Имеем:

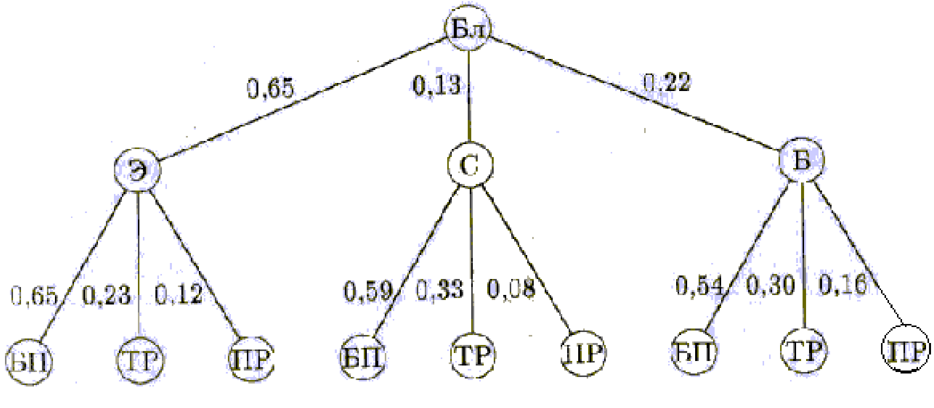
Бл	**Э**	**С**	**Б**
Э	**1**	**5**	**3**
С	**1/5**	**1**	**3/5**
Б	**1/3**	**5/3**	**1**

$\lambda_{\max} = 3{,}00, \qquad ИС = 0{,}0.$

Необходимые пояснения к таблице. Экономика имеет с превосходство перед окружающей средой (5) и слабое перед национальной безопасностью (3). Числа во 2-й и 3-й строках выбраны так, чтобы полученная матрица сравнений была обратно-симметричной и согласованной.

Столбец приоритетов, вычисленный любым из описанных четырех способов, имеет вид

Следовательно, в соответствии со сравнением по социально-политическому влиянию экономика получает приоритет 0,65, окружающая среда — 0,13 и национальная безопасность — 0,22 (рис. 3).



Проведем теперь оценку относительной важности каждого потребителя с точки зрения потребителя с точки зрения экономики, окружающей среды и национальной безопасности (составляющих второй уровень иерархии).

Соответствующие матрицы попарных сравнений, индексы согласованности и столбцы приоритетов имеют следующий вид:

Э	**БП**	**ТР**	**ПР**
БП	**1**	**3**	**5**
ТР	**1/3**	**5**	**2**
ПР	**1/5**	**1/2**	**1**

$\lambda_{\max} = 3{,}00, \qquad ИС = 0{,}00,$ $\begin{pmatrix} 0{,}65 \\ 0{,}23 \\ 0{,}12 \end{pmatrix};$

Э	**БП**	**ТР**	**ПР**
БП	**1**	**2**	**7**
ТР	**1/2**	**1**	**5**
ПР	**1/7**	**1/5**	**1**

$\lambda_{\max} = 3{,}01, \qquad ИС = 0{,}01,$ $\begin{pmatrix} 0{,}59 \\ 0{,}33 \\ 0{,}08 \end{pmatrix};$

Э	**БП**	**ТР**	**ПР**
БП	**1**	**2**	**3**
ТР	**1/2**	**1**	**2**
ПР	**1/3**	**1/2**	**1**

λmax = 3,01, ИС = 0,01, $\begin{pmatrix} 0{,}54 \\ 0{,}30 \\ 0{,}16 \end{pmatrix}.$

Запишем полученные данные в виде матрицы. Имеем

$$\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}59 & 0{,}54 \\ 0{,}23 & 0{,}33 & 0{,}30 \\ 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на столбец w, находим искомый столбец приоритетов третьего уровня иерархии, представляющего потребителей энергии БП, ТР и ПР (взвешенный согласно их общему влиянию):

$$\begin{pmatrix} 0{,}62 \\ 0{,}26 \\ 0{,}12 \end{pmatrix}.$$

Итак, в соответствии с нашими вычислениями на бытовое потребление следует выделить 62% энергии, на транспорт – 26% и на промышленность –12%.

2.3. Задание

Попробуйте рассчитать веса распределения времени между учебой, досугом и подработкой в соответствии с их общим вкладом в ваше личное благополучие через 7 – 10 лет, на которое влияют интересная работа, материальная обеспеченность и здоровье (семья), 3-й уровень – учеба, подработка, досуг.

Содержание 2.

ГЛАВА III
ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

3.1. Условия принятия решений

В теории принятия решений используются "разумные" процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Доброкачественность выбранного решения зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может принадлежать к одному из трех возможных условий.

1. Принятие решений в условиях определенности, когда данные известны точно.

2. Принятие решений в условиях риска, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений.

3. Принятие решений в условиях неопределенности, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений.

По существу, в условиях определенности данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены.* Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет "промежуточный" случай.

В этой главе представлены некоторые модели принятия решений, относящиеся к указанным трем условиям.

3.2. Принятие решений в условиях определенности

Модели линейного программирования являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями. В этом разделе рассматривается иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

3.2.1. Метод анализа иерархий

Перед тем как изложить детали данного метода, рассмотрим пример, демонстрирующий способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

Пример 3.2-1

Мартин Ганс – выпускник-отличник средней школы, который получил полную стипендию от трех университетов: *A, B* и *C*. В целях выбора университета Мартин сформулировал два основных критерия: местонахождение университета и его академическая репутация. Будучи отличным учеником, он оценивает академическую репутацию университета в пять раз выше, чем его местонахождение. Это приводит к тому, что репутации университета приписывается вес примерно 83 %, а его местонахождению – 17 %. Далее Мартин использует системный анализ, (сущность его излагается ниже), для оценки трех университетов с точки зрения их местонахождения и репутации. Проведенный анализ дает следующие оценки.

	Университет		
	A	***B***	***C***
Местонахождение	*12.9%*	*27.7%*	*59.4%*
Репутация	*54.5%*	*27.3%*	*18.2%*

---

*Это не значит, что в условии неопределенности полностью отсутствует информация о задаче. Речь идет о том, что имеющиеся данные трудно или невозможно классифицировать по степени значимости их для принятия решения и что для этих данных, рассматриваемых как реализации случайных величин или процессов, неизвестна или не может быть определена их функция распределения или другие статистические характеристики.

Структура задачи принятия решений приведена на рис. 14.1. Задача имеет единственный иерархический уровень с двумя критериями (местонахождение и репутация) и три альтернативных решения (университеты *A, B* и *C*).

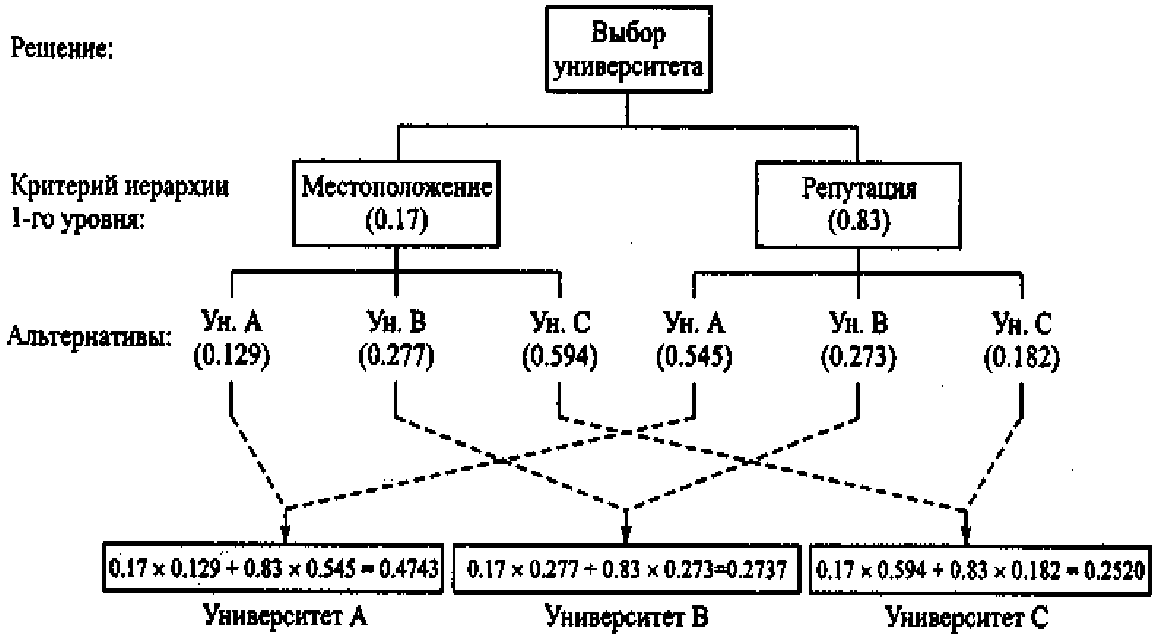


Рис. 14.1

Оценка трех университетов основана на вычислении *комбинированного* весового коэффициента для каждого из них.

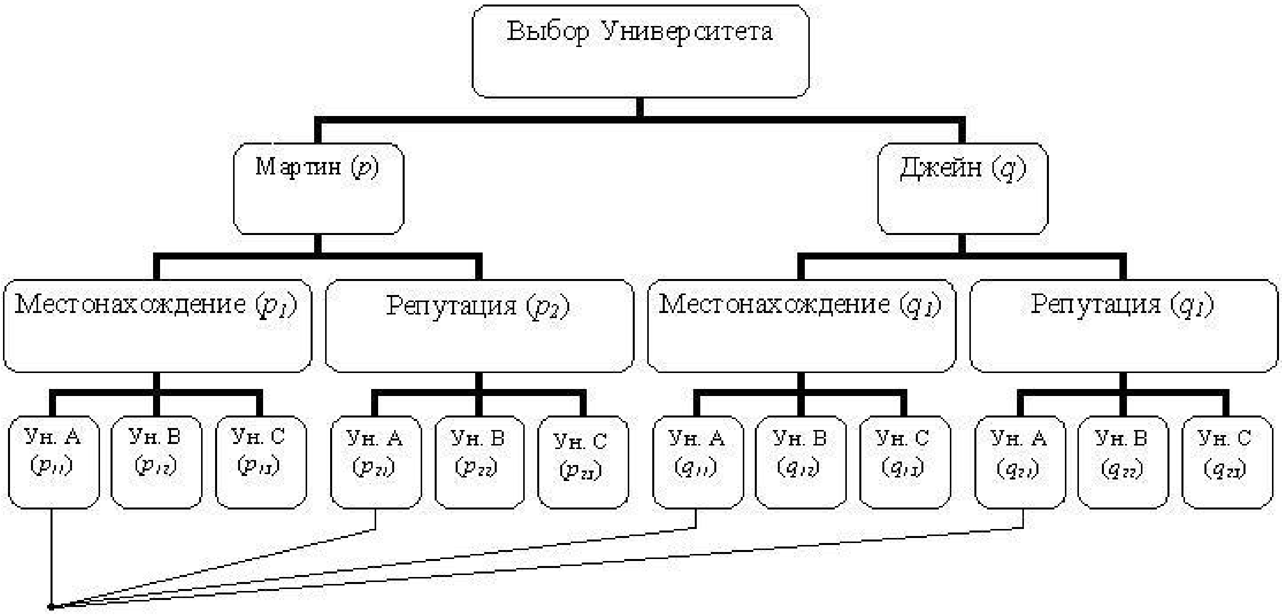
Университет А: 0.17 x 0.129 + 0.83 x 0.545 = 0.4743.

Университет В: 0.17 x 0.277 + 0.83 x 0.273 = 0.2737.

Университет С: 0.17 x 0.594 + 0.83 x 0.182 = 0.2520.

На основе этих вычислений университет А получает наивысший комбинируя ванный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором Мартина.

Общая структура метода анализа иерархий может включать несколько иерархическая уровней со своими критериями. Предположим в примере 3.2-1, что сестра-близнец Мартина Джейн также получила полную стипендию от трех университетов. Однако их родители ставят условие, что дети должны учиться в одном университете, тогда они смогут пользоваться одним автомобилем. На рис. 14.2 приведена структура задачи выбора решения, которая теперь включает два иерархических уровня со своими критериями. Величины p и q (предположительно равные) на первом иерархическом уровне представляй ют собой весовые коэффициенты, которые приписываются точке зрения Мартина и Джейн относительно процесса выбора, соответственно. Второй иерархический уровень использует веса (p_1, p_2) и (q_1, q_2) для отображения индивидуальных точек зрения Мартина и Джейн относительно критериев местонахождения и академической репутации каждого университета. Остальная часть структуры принятия решения может быть интерпретирована аналогично предыдущему примеру. Заметим, что $p+q=1, p_1+q_1=1, q_1+q_2=1, p_{11}+p_{12}+p_{13}=1, p_{21}+p_{22}+p_{23}=1, q_{11}+q_{12}+q_{13}=1,$ $q_{21}+q_{22}+q_{23}=1$. Определение комбинированного веса для университета *A*, представленное на рис. 14.2, демонстрирует, каким образом вычисляются эти показатели.



Ун. А $= p\left(p_1 \times p_{11} + p_2 \times p_{21}\right) + q\left(q_1 \times q_{11} + q_2 \times q_{21}\right)$

3.2.2. Упражнение 3.2, а

1. Пусть для задачи выбора университета Мартином и Джейн установлены следующие значения весовых коэффициентов.

$$p = 0.5, q = 0.5,$$

$$p_1 = 0.17, p_2 = 0.83,$$

$$p_{11} = 0.129, p_{12} = 0.277, p_{13} = 0.182,$$

$$p_{21} = 0.545, p_{22} = 0.273, p_{23} = 0.182,$$

$$q_1 = 0.3, q_2 = 0.7,$$

$$q_{11} = 0.2, q_{12} = 0.3, q_{13} = 0.5,$$

$$q_{21} = 0.5, q_{22} = 0.2, q_{23} = 0.3.$$

основываясь на этой информации, оцените с помощью комбинированных весов каждый из трех университетов.

Определение весовых коэффициентов. Сложность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов (таких, какие использованы в примере 3.2. – 1) для оценки альтернативных решений. Если имеется n критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура задает матрицу **A** размерности $n \times n$, именуемую *матрицей парных сравнений*, которая отражает суждение лица, принимающего решения, относительно важности различных критериев. Парное сравнение выполняется таким образом, что критерий в строке i *(i* = 1, 2, …, *n)* оценивается относительно каждого из критериев, представленных n столбцами. Обозначим через $a_{ij} = 1$ элемент матрицы **A**, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца. В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что i-й и j-й критерии *одинаково важны*, $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что i-й критерий *значительно важнее* j-го, а $a_{ij} = 9$ указывает, что i-й критерий *чрезвычайно важнее* j-го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим условием: если $a_{ij} = k$, то автоматически = $1/k$. Кроме того, все диагональные элементы a_{ii} матрицы **A** должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

Пример 3.2-2

Покажем как определяется матрица сравнения **A** для задачи выбора Мартина из примера 3.2.–1. Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации и его местонахождения. С точки зрения Мартина академическая репутация университета *значительно важнее* его местонахождения. Следовательно, он приписывает элементу (1,2) матрицы **A** значение 5, т.е. a_{12}=5. это автоматически предполагает, что a_{21}=1/5/ обозначив через R и L критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом.

$$A = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

относительно веса критериев R и L могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы А делим элементы первого столбца на величину 1 + 1/5 — 1.2, элементы второго – на величину 5 + 1=6. Искомые относительные веса w_R и w_L критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы **A**. Следовательно,

$$N = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.83 & 0.83 \\ 0.17 & 0.17 \end{bmatrix} \end{array}$$

средние значения элементов строк

$$w_R = (0.83 + 0.83)/2 = 0.83,$$
$$w_L = (0.17 + 0.17)/2 = 0.17.$$

В результате вычислений получили w_R = 0.83 и w_L = 0.17, т.е. те веса, которые показаны на рис. 14.1. Столбцы матрицы **N** одинаковы, что имеет место лишь в случае, когда лицо, принимающее решение, проявляет идеальную *согласованность* в определении элементов матрицы **A**. *Этот тезис детальнее обсуждается ниже.*

Относительные веса альтернативных решений, соответствующих университетам *A, B* и *C*, вычисляются в пределах каждого критерия R и L с использованием следующих двух матриц сравнения.

$$A_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

Сумма элементов столбцов = [1.83, 3.67, 5.5],

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
A_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Сумма элементов столбцов = [8, 3.5, 1.7].

Элементы матриц A_R и A_L, определены на основе суждений Мартина, касающихся относительной важности трех университетов.

При делении элементов каждого столбца матриц A_R и A_L на сумму элементов этих же столбцов получаем следующие нормализованные матрицы.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
N_R = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

средние значения элементов строк

$$w_{RA} = (0.545 + 0.545 + 0.545)/3 = 0.545,$$
$$w_{RB} = (0.273 + 0.273 + 0.273)/3 = 0.273,$$
$$w_{RC} = (0.182 + 0.182 + 0.182)/3 = 0.182,$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
N_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ 0.250 & 0.286 & 0.294 \\ 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

средние значения элементов строк

$$w_{LA} = (0.125 + 0.143 + 0.118)/3 = 0.129,$$
$$w_{LB} = (0.250 + 0.286 + 0.294)/3 = 0.277,$$
$$w_{LC} = (0.625 + 0.571 + 0.588)/3 = 0.594.$$

Величины (w_{RA}, w_{RB}, w_{RC}) = (0.545, 0.273, 0.182) дают соответствующие веса для университетов *A, B* и *C* с точки зрения академической репутации. Аналогично величины (w_{lA}, w_{LB}, w_{LC}) = (0.129, 0.277, 0.594) являются относительными весами, касающимися местонахождения университетов.

Согласованность матрицы сравнений. В примере 3.2-2 мы отмечали, что все столбцы нормализованных матриц $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N_R}$ идентичны, а столбцы матрицы $\boldsymbol{N_L}$ таковыми не являются. Одинаковые столбцы указывают на то, что результирующие относительные веса сохраняют одно и то же значение независимо от того, как выполняется сравнение. В этом случае говорят, что исходные матрицы сравнения $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A_R}$ являются *согласованными*. Следовательно, матрица $\boldsymbol{A_L}$, не является таковой.

Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы $\boldsymbol{A}$ означает, что $a_{ij}\ a_{jk} = a_{ik}$ для всех *i*, *j* и *k*. Например, в матрице A_R из примера 3.2-2 a_{13} = 3 и $a_{12}\ a_{23}$ = 2 x 3/2 = 3. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы **A**. В частности, столбцы любой матрицы сравнений размерностью 2x2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными. Действительно, принимая во внимание, что такие матрицы строятся на основе человеческих суждений, можно ожидать некоторую степень несогласованности, и к ней следует относиться терпимо при условии, что она не выходит за определенные "допустимые" рамки.

Чтобы выяснить, является ли уровень согласованности "допустимым", необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений **A**. В примере 3.2-2 мы видели, что идеально согласованная матрица **A** порождает нормализованную матрицу ***N***, в которой все столбцы одинаковы.

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \cdots & w_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица сравнений ***A*** может быть получена из матрицы ***N*** путем деления элементов *i*-го столбца на w_i - (это процесс, обратный к нахождению матрицы ***N*** из ***A***). Итак, получаем следующее.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя приведенное определение матрицы ***A***, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

В компактной форме условие согласованности матрицы ***A*** формулируется следующим образом. Матрица ***A*** будет согласованной тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = n\mathbf{w},$$

где **w** – вектор-столбец относительных весов w_i , i= 1, 2,..., n.

Когда матрица ***A*** не является согласованной, относительный вес w_i аппроксимируется средним значением n элементов *i*-й строки нормализованной матрицы N (см. пример 3.2-2). Обозначив через w вычисленную оценку (среднее значение), можно показать, что

$$\mathrm{A}\bar{\mathrm{w}} = n_{\max}\bar{\mathrm{w}},$$

где $n_{\max} \geq n$. В этом случае, чем ближе $n_{\max}$ к n, тем более согласованной является матрица сравнения ***A*.** В результате в соответствии с методом анализа иерархий вычисляется *коэффициент согласованности* в виде

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

где,

$CI = \dfrac{n_{\max} - n}{n-1}$, коэффициент согласованности матрицы ***A*,**

$RI=\frac{1.98(n-2)}{n}$, стохастический коэффициент согласованности матрицы $\boldsymbol{A}$.

Стохастический коэффициент согласованности RI определяется эмпирическим путем как среднее значение коэффициента CI для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения $\boldsymbol{A}$.

Коэффициент согласованности CR используется для проверки согласованности матрицы сравнения $\boldsymbol{A}$ следующим образом. Если $CR < 0.1$, уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения $\boldsymbol{A}$ является высоким и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверить элементы парного сравнения a_{ij} матрицы $\boldsymbol{A}$ в целях получения более согласованной матрицы.

Значение $n_{\max}$ вычисляется на основе матричного уравнения $A\bar{w} = n_{\max}\bar{w}$, при этом нетрудно заметить, что i'-е уравнение этой системы имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{w}_j = n_{\max}\bar{w}_i, i=1,2,...,n.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i=1$, легко проверить, что

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{w}_j\right) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i = n_{\max}.$$

Это значит, что величину $n_{\max}$ можно определить путем вычисления вектор-столбца $A\bar{w}$ с последующим суммированием его элементов.

Пример 3.2-3

В примере 3.2-2 матрица $\boldsymbol{A_L}$ является несогласованной, так как столбцы матрицы $\boldsymbol{N_L}$ неодинаковы. Требуется исследовать согласованность матрицы $\boldsymbol{A_L}$,.

Вычислим значение $n_{\max}$. Из данных примера 3.2-2 имеем

$$\bar{w}_1=0.129, \bar{w}_2=0.277, \bar{w}_3=0.594.$$

Следовательно,

$$A_L\bar{w}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\\ 2 & 1 & \frac{1}{2}\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.129\\0.277\\0.594\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3863\\0.8320\\1.7930\end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$n_{\max}=0.3863+0.8320+1.7930=3.0113.$$

Следовательно, для $n = 3$ имеем

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n-1} = \frac{3.0113 - 3}{3-1} = 0.00565,$$

$$RI = \frac{1.98(n-2)}{n} = \frac{1.98 \times 1}{3} = 0.66,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.00565}{0.66} = 0.00856.$$

Так как CR<0.1, уровень несогласованности матрицы $\boldsymbol{A_L}$ является приемлемым.

3.2.3. ***Упражнения 3.2, b***

1. Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Стив *(S),* Джейн *(J)* и Майса *(M).* Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование *(C)*, опыт работы *(O)* и рекомендации *(P).* Отдел кадров использует матрицу $\boldsymbol{A}$ (приведенную ниже) для сравнения трех критериев. После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы $\boldsymbol{A_c}$, $\boldsymbol{A_o}$ и $\boldsymbol{A_p}$. Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$A = \begin{array}{c} \\ C \\ O \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & O & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_C = \begin{array}{c} \\ S \\ J \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$A_O = \begin{array}{c} \\ S \\ J \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_P = \begin{array}{c} \\ S \\ J \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

2. Кевин и Джун Парки *(К* и *Д)* покупают новый дом. Рассматриваются три варианта *A, B* и *C.* Парки согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (Л) и близость к месту работы *(Б),* а также разработали матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

$$A = \begin{array}{c} \\ К \\ Д \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} К & Д \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_К = \begin{array}{c} \\ Л \\ Б \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Л & Б \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_Д = \begin{array}{c} \\ Л \\ Б \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Л & Б \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$
A_{КЛ} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_{КБ} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
$$

$$
A_{ДЛ} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_{ДБ} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array},
$$

3. Автор книги по исследованию операций определил три критерия для выбора издательства, которое будет печатать его книгу: процент авторского гонорара *(R)*, уровень маркетинга *(M)* и размер аванса *(A)*. Издательства *N* и *P* проявили интерес к изданию книги. Используя приведенные ниже матрицы сравнения, необходимо дать оценку двум издательствам и оценить согласованность решения.

$$
A = \begin{array}{c} \\ R \\ M \\ A \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & M & A \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_R = \begin{array}{c} \\ H \\ P \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} H & P \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_M = \begin{array}{c} \\ H \\ P \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} H & P \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_A = \begin{array}{c} \\ H \\ P \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} H & P \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

4. Профессор политологии планирует предсказать исход выборов в местный школьный совет. Кандидаты *I*, *B* и *S* баллотируются на одно место. Профессор делит всех избирателей на три категории: левые *(L)*, центристы *(C)* и правые *(R)*. Оценка кандидатов основывается на трех факторах: педагогический опыт *(О),* отношение к детям *(Д)* и характер *(Х)*. Ниже приведены матрицы сравнения для первого иерархического уровня, связанного с градацией избирателей (левые, центристы и правые).

$$
A = \begin{array}{c} \\ L \\ C \\ R \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_L = \begin{array}{c} \\ О \\ Д \\ Х \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} О & Д & Х \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
$$

$$
A_C = \begin{array}{c} \\ O \\ Д \\ X \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & Д & X \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_R = \begin{array}{c} \\ O \\ Д \\ X \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & Д & X \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \end{array},
$$

Профессор сгенерировал еще девять матриц сравнения для трех кандидатов на втором иерархическом уровне, связанном с педагогическим опытом, отношением к детям и характером. Затем был использован метод анализа иерархий для сведения этих матриц к следующим относительным весам.

Кандидат	**Левые**			**Центристы**			**Правые**		
	О	*Д*	*Х*	*О*	*Д*	*Х*	*О*	*Д*	*Х*
I	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5	0.2	0.7	0.1	0.3
B	0.5	0.4	0.2	0.4	0.2	0.4	0.1	0.4	0.2
S	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3	0.4	0.2	0.5	0.5

Используя эту информацию, необходимо определить, кто из кандидатов выиграет выборы, и оценить согласованность решения.

5. Школьный округ крайне заинтересован в сокращении своих расходов, что вызвано очередным уменьшением бюджетного финансирования начальных школ. Есть две возможности решить эту проблему: ликвидировать программу физического воспитания *(Ф)* или программу музыкального образования *(М)*. Управляющий округа сформировал комитет с равным представительством от местного школьного совета *(С)* и ассоциации родителей и учителей *(Р)* для изучения ситуации и выработки предложения. Комитет принял решение изучить ситуацию с точки зрения ограничения бюджета *(Б)* и потребностей учеников *(П)*. Проведенный анализ дал следующие матрицы сравнения.

$$
A_C = \begin{array}{c} \\ Б \\ П \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Б & П \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_P = \begin{array}{c} \\ Б \\ П \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Б & П \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array},
$$

$$
A_{СБ} = \begin{array}{c} \\ Ф \\ М \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ф & М \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_{СП} = \begin{array}{c} \\ Ф \\ М \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ф & М \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
$$

$$
A_{РБ} = \begin{array}{c} \\ Ф \\ М \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ф & М \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array},
\qquad
A_{РП} = \begin{array}{c} \\ Ф \\ М \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ф & М \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

Требуется проанализировать ситуацию, связанную с принятием решения, и выработать соответствующее предложение.

6. Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех моделей: *M*1, *M*2 и *M*3. Факторами влияющими на его решение , являются: стоимость автомобиля (С), стоимость обслуживания (О), стоимость поездки по городу (Г) и сельской местности (М). Следующая таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

Модель автомобиля	С ($)	О ($)	Г ($)	М ($)
*M*1	6 000	1 800	4 500	1 500
*M*2	8 000	1 200	2 250	750
*M*3	10 000	600	1 125	600

Используйте указанные стоимости для построения матриц сравнений. Оцените согласованность матриц и определите модель автомобиля, которую следует выбрать.

3.3. Принятие решений в условиях риска

Если решение принимается в условиях риска, то стоимости альтернативных решений обычно описываются вероятностными распределениями. По этой причине принимаемое решение основывается на использовании критерия ожидаемого значения, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат. Такой подход имеет свои недостатки, которые не позволяют использовать его в некоторых ситуациях. Для них разработаны модификации упомянутого критерия. В этой главе рассматриваются часто используемые подходы к принятию решений в условиях риска.

3.3.1. Критерий ожидаемого значения

Критерий ожидаемого значения сводится либо к максимизации ожидаемой (средней) прибыли, либо к минимизации ожидаемых затрат. В данном случае предполагается, что прибыль (затраты), связанная с каждым альтернативным решением, является случайной величиной.

ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ. В приведенном ниже примере рассматривается простая ситуация, связанная с принятием решения при наличии конечного числа альтернатив и точных значений матрицы доходов.

Пример 3.3-1

Предположим, что вы хотите вложить на фондовой бирже 10 000 долларов в акции одной из двух компаний: *A* или *B*. Акции компании *A* являются рискованными, но могут принести 50% прибыли от суммы инвестиции на протяжении следующего года. Если условия фондовой биржи будут неблагоприятны, сумма инвестиции может обесцениться на 20%. Компания *B* обеспечивает безопасность инвестиций с 15% прибыли в условиях повышения котировок на бирже и только 5% – в условиях понижения котировок. Все аналитические публикации, с которыми можно познакомиться (а они всегда есть в изобилии в конце года), с вероятностью 60% прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40% – понижение котировок. В какую компанию следует вложить деньги?

Информация, связанная с принятием решения, суммирована в следующей таблице.

Альтернативное решение	**Прибыль от инвестиции за один год**	
	При повышении котировок ($)	**При понижении котировок ($)**
Акции компании *A*	5 000	– 2 000
Акции компании *B*	1 500	500

Вероятность события	0.6	0.4

Эта задача может быть также представлена в виде дерева решений, показанного на рис. 14.3. На этом рисунке используется два типа вершин: квадратик представляет *"решающую" вершину,* а кружок – *"случайную".* Таким образом, из вершины 1 ("решающая") выходят две ветви, представляющие альтернативы, связанные с покупкой акций компании *А* или *В*. Далее две ветви, выходящие из "случайных" вершин 2 и 3, соответствуют случаям повышения и понижения котировок на бирже с вероятностями их появления и соответствующими платежами.

Исходя из схемы рис. 14.3, получаем ожидаемую прибыль за год для каждой из двух альтернатив.

Для акций компании *А:* $5 000 х 0.6 + (-2000) х 0.4 = S2 200.

Для акций компании *В*: $1 500 х 0.6 + $500 х 0.4 = $1 100.

Вашим решением, основанным на этих вычислениях, является покупка акций компании *А*.

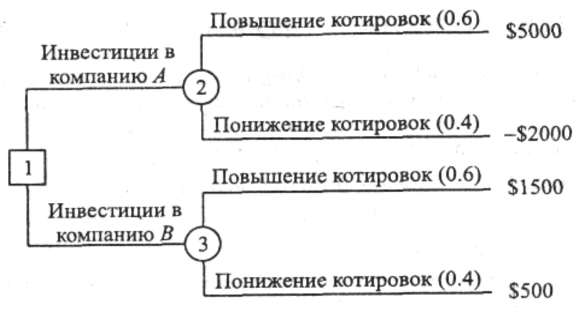


Рис. 14.3

В теории принятия решений повышение и понижение котировок на бирже именуются **состояниями природы,** возможные реализации которых являются случайными событиями (в данном случае с вероятностями 0.6 и 0.4). В общем случае задача принятия решений может включать *n* состояний природы и *m* альтернатив. Если p_J – вероятность *j*-го состояния природы, а a_{ij} – платеж, связанный с принятием решения *i* при состоянии природы *j* (*i* = 1, 2, ..., *m, j* = 1, 2, ..., *n),* тогда ожидаемый платеж для решения *i* вычисляется в виде

$$MV_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n, i = 1, 2, ..., n.$$

где по определению $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Наилучшим решением будет то, которое соответствует $MV_i^* = \max_i\{MV_i\}$ или $MV_i^* = \min_i\{MV_i\}$, в зависимости от того, является ли платеж в задаче доходом (прибылью) или убытком (затратами).

Упражнения 3.3,а

1. Вас пригласили на телевизионную игру *Колесо фортуны.* Колесо управляется электронным образом с помощью двух кнопок, которые сообщают колесу сильное *(В)* или слабое (Я) вращение. Само колесо разделено на равные области – белую *(Б)* и красную *(К).* Вам сообщили, что в белой области колесо останавливается с вероятностью 0.3, а в красной – 0.7. Плата, которую вы получаете за игру, равна (в долларах) следующему.

	Б	К
В	800	200
Н	–2500	1000

Изобразите соответствующее дерево решений.

2. Фермер Мак-Кой может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0.25, 0.30 и 0.45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долларов чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10 000 долларов. Если цены останутся неизменными, Мак-Кой лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долларов соответственно.

a) Представьте данную задачу в виде дерева решений.

b) Какую культуру следует выращивать Мак-Кою?

3. Допустим, у вас имеется возможность вложить деньги в три инвестиционных фонда открытого типа: простой, специальный (обеспечивающий максимальную долгосрочную прибыль от акций мелких компаний) и глобальный. Прибыль от инвестиции может измениться в зависимости от условий рынка. Существует вероятность 10 %, что ситуация на рынке ценных бумаг ухудшится, 50 % – что рынок останется умеренным и 40 % – рынок будет возрастать. Следующая таблица содержит значения процентов прибыли от суммы инвестиции при трех возможностях развития рынка.

Альтернатива (фонды)	Процент прибыли от инвестиции (%)		
	Ухудшающийся рынок	Умеренный рынок	Растущий рынок
Простой	+5	+7	+8
Специальный	-10	+5	+30
Глобальный	+2	+7	+20

a) Представьте задачу в виде дерева решений.

b) Какой фонд открытого типа вам следует выбрать?

4. Предположим, у вас имеется возможность вложить деньги либо в 7.5%-ные облигации, которые продаются по номинальной цене, либо в специальный фонд, который выплачивает лишь 1% дивидендов. Если существует вероятность инфляции, процентная ставка возрастет до 8%, и в этом случае номинальная стоимость облигаций увеличится на 10%, а цена акций фонда – на 20%. Если прогнозируется " спад, то процентная ставка понизится до 6%. При этих условиях ожидается, что номинальная стоимость облигаций поднимется на 5%, а цена акций фонда увеличится на 20%. Если состояние экономики останется неизменным, цена акций фонда увеличится на 8%, а номинальная стоимость облигаций не изменится. Экономисты оценивают в 20% шансы наступления инфляции и в 15% – наступление спада. Ваше решение относительно инвестиций принимается с учетом экономических условий следующего года.

a) Представьте задачу в виде дерева решений.

b) Будете ли вы покупать акции фонда или облигации?

5. Фирма планирует производство новой продукции быстрого питания в национальном масштабе. Исследовательский отдел убежден в большом успехе новой продукции и хочет внедрить ее немедленно, без рекламной кампании на рынках сбыта

фирмы. Отдел маркетинга положение вещей оценивает иначе и предлагает провести интенсивную рекламную кампанию. Такая кампания обойдется в 100000 долларов, а в случае успеха принесет 950 000 долларов годового дохода. В случае неуспеха рекламной кампании (вероятность этого составляет 30 %) годовой доход оценивается лишь в 200000 долларов. Если рекламная кампания не проводится вовсе, годовой доход оценивается в 400 000 долларов при условии, что покупателям понравится новая продукция (вероятность этого равна 0.8), и в 200 000 долларов с вероятностью 0.2, если покупатели останутся равнодушными к новой продукции.

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Как должна поступить фирма в связи с производством новой продукции?

6. Симметричная монета подбрасывается три раза. Вы получаете один доллар за каждое выпадение герба *(Г)* и дополнительно 0.25 доллара за каждые два последовательных выпадения герба (заметим, что выпадение *ГГГ* состоит из двух последовательностей /Т). Однако Вам приходится платить 1.1 доллара за каждое выпадение решетки *(Р)*. Вашим решением является участие или неучастие в игре.

a) Постройте соответствующее дерево решений для описанной игры.

b) Будете ли вы играть в эту игру?

7. Предположим, у вас имеется возможность сыграть в игру следующего содержания. Симметричная игральная кость бросается два раза, при этом возможны четыре исхода: 1) выпадает два четных числа, 2) выпадает два нечетных числа, 3) выпадает сначала четное, затем нечетное число, 4) выпадает сначала нечетное, затем четное число. Вы можете делать одинаковые ставки на два исхода. Например, вы можете поставить на два четных числа (исход 1) и два нечетных (исход 2). Выигрыш на каждый доллар, поставленный на первый исход, равен 2 доллара, на второй и третий исходы – 1.95 доллара, на четвертый – 1.50 доллара.

a) Постройте дерево решений для описанной игры.

b) На какие исходы следует делать ставки?

c) Можно ли иметь стабильный выигрыш в этой игре?

8. Фирма производит партии продукции с 0.8 %, 1 %, 1.2 % и 1.4 % бракованных изделий с вероятностями 0.4, 0.3, 0.25 и 0.05 соответственно. Три потребителя A, B и C заключили контракт на получение партий изделий с процентом некачественных изделий не выше 0.8 %, 1.2 % и 1.4 % соответственно. Фирма штрафуется в сумме 1000 долларов за каждый пункт процента[1] в случае, когда процент некачественных изделий выше указанного. Наоборот, поставка партий изделий с меньшим процентом бракованных изделий, чем оговорено в контракте, приносит фирме прибыль в 500 долларов за каждый пункт процента. Предполагается, что партии изделий перед отправкой не проверяются.

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Какой из потребителей должен иметь наивысший приоритет при получении своего заказа?

9. Фирма планирует открыть новое предприятие в Арканзасе. В настоящее время имеется возможность построить либо крупное предприятие, либо небольшое, которое через два года можно будет расширить при условии высокого спроса на выпускаемую им продукцию. Рассматривается задача принятия решений на десятилетний период. Фирма оценивает, что на протяжении этих 10 лет вероятность высокого и низкого спроса на производимую продукцию будет равна 0.75 и 0.25 соответственно. Стоимость немедленного строительства крупного предприятия равна 5 миллионов долларов, а небольшого – один миллион долларов. Расширение малого предприятия через два года

[1] Пункт процента — это одна десятая процента.

обойдется фирме в 4.2 миллиона долларов. Прибыль, получаемая от функционирования производственных мощностей на протяжении 10 лет, приводится в следующей таблице.

Альтернатива		
	Высокий спрос	Низкий спрос
Крупное предприятие сейчас	1000	300
Небольшое предприятие сейчас	250	200
Расширенное предприятие через 2 года	900	200

a) Постройте соответствующее дерево решений, принимая во внимание, что через два года фирма может либо расширить небольшое предприятие, либо не расширять его.

b) Сформулируйте стратегию строительства для фирмы на планируемый 10-летний период. (Для простоты не принимайте во внимание возможную инфляцию.)

10. Решите предыдущее упражнение в предположении, что ежегодная учетная ставка равна 10 % и что решение принимается с учетом инфляции. *(Совет.* Для решения задачи необходимы таблицы сложных процентных ставок.)

11. Решите упражнение 9 в предположении, что спрос может быть высоким, средним и низким с вероятностями 0.7, 0.2 и 0.1 соответственно. Расширение небольшого предприятия будет проведено лишь в том случае, если на протяжении первых двух лет спрос будет высоким. Следующая таблица содержит данные о прибылях за год.

Альтернатива	Ожидаемый доход за год (тысячи долл.)		
	Высокий спрос	Средний спрос	Низкий спрос
Крупное предприятие сейчас	1000	500	300
Небольшое предприятие сейчас	400	280	150
Расширенное предприятие через 2 года	900	600	200

БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ СИТУАЦИИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ. Для демонстрации других возможностей применения критерия ожидаемого значения рассмотрим ситуации принятия решений, в которых плата является математической функцией альтернативных решений. В этом случае представление задачи в виде дерева решений хотя и является возможным, но может быть не столь полезным, как в предыдущих примерах.

Пример 3.3-2

Электроэнергетическая компания использует парк из 20 грузовых автомобилей для обслуживания электрической сети. Компания планирует периодический профилактический ремонт автомобилей. Вероятность p_t поломки автомобиля по истечении t месяцев после профилактического ремонта оценивается следующим образом.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
p_t	0.05	0.07	0.10	0.13	0.18	0.23	0.33	0.43	0.50	0.55

Случайная поломка одного грузового автомобиля обходится компании в 200 долларов, а планируемый профилактический ремонт в 50 долларов. Необходимо определить оптимальный период (в месяцах) между планируемыми профилактическими ремонтами.

Обозначим через N искомое число месяцев между профилактическими ремонтами. На протяжении N-месячного цикла могут иметь место два вида расходов: 1) затраты, связанные с устранением поломки автомобиля на протяжении первых $N – 1$ месяцев и 2) затраты на профилактический ремонт в конце цикла. Затраты второго вида (профилактический ремонт) составляют \$50 х 20 автомобилей, т.е. 1000 долларов на цикл. Затраты, связанные с устранением поломок автомобилей, должны основываться на среднем количестве автомобилей, вышедших из строя на протяжении первых N - 1 месяцев цикла. Здесь мы имеем два состояния по истечении месяца t: поломка автомобиля с вероятностью p_t и ее отсутствие с вероятностью $1 – p_t$. Следовательно, ожидаемое число поломок по истечении месяца t равно количеству автомашин в парке, умноженному на p_t т.е. $20p_t$. Используя этот результат, подсчитаем ожидаемое общее число сломавшихся автомобилей на протяжении первых $N – 1$ месяцев цикла в виде суммы соответствующих величин для каждого месяца в отдельности, т.е. $20p_1 + 20p_2 + ... + 20p_{N-1} = 20(p_1 + p_2 + ... + p_{N-1})$. Обозначив через $EC(N)$ общую ожидаемую стоимость для цикла между профилактическими ремонтами, имеем следующее.

$$EC(N) = \$1000 + \$200 \text{ x } 20(p_1 + p_2 + ... + p_{N-1}).$$

Задача выбора решения компанией сводится таким образом к определению длины цикла N, которая минимизирует общие ожидаемые затраты за один месяц $ECPM(N)$, т.е. величину

$$ECPM(N) = \frac{EC(N)}{N} = \frac{1000 + 4000\sum_{t=1}^{N-1} p_t}{N}$$

Минимизацию функции $ECPM(N)$ нельзя выполнить в явной форме. Вместо этого используется следующая табличная форма нахождения решения.

	N	p_N	$\sum_{t=1}^{N-1} p_t$	$ECPM(N)$
	1	0.05	0.00	\$ 1 000.00
	2	0.07	0.05	600.00
	3	0.10	0.12	493.33
Оптимальное $N \rightarrow$	4	0.13	0.22	470.00
	5	0.18	0.35	480.00
	6	0.23	0.53	520.00

Вычисления показывают, что $ECPM(N)$ достигает своего минимума при $N = 4$. Следовательно, профилактический ремонт автомобилей нужно выполнять каждые четыре месяца.

Задачу выбора решения в примере 3.3-2 можно также представить в виде дерева решений. Вам предлагается сделать это в упражнении 3.3,b(1).

Упражнения 3.3,b

1. В задаче из примера 3.3-2 стоимость профилактического ремонта одного автомобиля равна 75 долларов, а стоимость устранения поломки – 200 долларов. Вероятность поломки автомобиля в первый месяц равна 0.03 и увеличивается на 0.01 для каждого последующего месяца, по десятый включительно. Начиная с одиннадцатого месяца и далее, вероятность поломки сохраняется постоянной на уровне 0.13.

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Определите оптимальную длину цикла для профилактического ремонта.

2. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине задается следующим распределением вероятностей.

N	100	150	200	250	300
P_n	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10

Магазин покупает булочку по 55 центов, а продает по 1.20 доллара. Если булочка не продана в тот же день, то к концу дня она может быть реализована за 25 центов. Величина запаса булочек может принимать одно из возможных значений спроса, которые перечислены выше.

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Сколько булочек необходимо заказывать ежедневно?

3. Пусть в предыдущем упражнении временной интервал, для которого необходимо решить задачу принятия решений, составляет два дня. Альтернативы для второго дня зависят от объема реализации булочек в первый день. Если реализован в точности весь запас первого дня, магазин закажет такое же количество булочек и на второй день. Если потребность в булочках в первый день превышает имеющийся запас, то для второго дня магазин может заказать любой из объемов спроса на булочки, который превышает запас первого дня. И, наконец, если в первый день реализовано меньше булочек, чем было закуплено, то для второго дня магазин может заказать любой из объемов спроса на булочки, который меньше запаса первого дня. Постройте соответствующее дерево решений и определите оптимальную стратегию заказа.

4. Автомат производит, α тысяч единиц некоего продукта ежедневно. Если α увеличивается, доля брака p, будучи случайной величиной, возрастает в соответствии со следующей функцией плотности распределения:

$$f(p) = \begin{cases} \alpha p^{\alpha-1}, & 0 \le p \le 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Каждое бракованное изделие приносит убыток в 50 долларов, а качественное изделие — прибыль в 5 долларов.

a) Объясните, почему трудно построить дерево решений для этой задачи.

b) Определите значение $a,$ при котором ожидаемая прибыль принимает максимальное значение.

5. Наружный диаметр d цилиндра, производимого автоматом, имеет верхнее и нижнее допустимые значения $d + t_U$ и $d - t_L$ соответственно. Производственный процесс настроен так, что величина диаметра является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ. Каждый цилиндр со значением диаметра, превышающим верхнее допустимое значение, доводится до нужных размеров за c_1 долларов. Цилиндр, диаметр которого меньше установленной нижней нормы, реализуется с убытком c_2 долларов. Определите оптимальное значение настройки для автомата.

6. В производственном процессе периодически производится заточка режущих инструментов. Если инструмент не затачивается достаточно часто, то возрастает процент брака, и наоборот. Пусть S_U и SL – соответственно верхний и нижний допустимые пределы измеримого размера изделия, обрабатываемого с помощью режущего инструмента в данном производственном процессе. Далее пусть $\mu(t)$ – среднее значение результата производственного процесса (например, размера изделия, получаемого в

результате обработки режущим инструментом) после того, как прошло t единиц времени после последней заточки инструмента; здесь $\mu(0)$ соответствует идеальной начальной настройке инструмента. Стоимость заточки инструмента равна c_1, а стоимость бракованного изделия — c_2. Продукция производится партиями объемом Q со скоростью r единиц продукции в единицу времени, и результат процесса описывается нормальным распределением со средним значением $\mu(t)$ и не зависящим от времени стандартным отклонением σ.

a) Найдите выражение для ожидаемой стоимости заточки инструмента и переделки дефектных изделий как функцию интервала времени T между последовательными заточками.

b) Покажите, что оптимальное значение T не зависит от Q, и объясните это.

c) Найдите численное значение T при следующих данных: c_1 = 10 долларов, c_2 - 48.85 долларов, r = 10 единиц продукции за час, $\mu(t) = \mu(0)\_ = +t$ и $\sigma = 1$.

(Совет. Аппроксимируйте число заточек инструмента при изготовлении партии объемом Q с помощью числа Q/rT. Кроме того, используйте численное интегрирование для нахождения оптимального значения *T.)*

1. Критерий предельного уровня. Фирма для технических целей использует в одном из своих производственных процессов химические препараты (химикалии). Срок годности этих препаратов составляет один месяц, после чего оставшаяся их часть уничтожается. Объем используемых фирмой химических препаратов (в галлонах) является случайной величиной, изменяющейся в соответствии со следующим распределением.
Реально химикалии используются на протяжении месяца в соответствии с равномерным распределением. Фирма планирует определить количество химических препаратов, удовлетворяющих двум конфликтующим критериям (или предельным уровням).
1) Среднее число оставшихся химикалий не превышает 20 галлонов в месяц.
2) Среднее количество недостающих химикалий не превышает 40 галлонов в месяц.

3.3.2. Другие критерии ожидаемого значения

В этом разделе рассматриваются три модификации критерия ожидаемого значения. Первая состоит в определении *апостериорных вероятностей* на основе эксперимента над исследуемой системой, вторая — в *полезности* реальной стоимости денег, а третья модифицирует критерий ожидаемого значения таким образом, что он может быть использован для принятия решений при краткосрочном планировании.

АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ БАЙЕСА. Распределения вероятностей, которые используются при формулировке критерия ожидаемого значения, получаются, как правило, из накопленной ранее информации. В некоторых случаях оказывается возможным модифицировать эти вероятности с помощью текущей и/или полученной ранее информации, которая обычно основывается на исследовании выборочных (или экспериментальных) данных. Получаемые при этом вероятности называют апостериорными (или Байесовскими), в отличие от априорных, полученных из исходной информации. Следующий пример показывает, как рассмотренный в разделе 3.3.1 критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, чтобы воспользоваться новой информацией, содержащейся в апостериорных вероятностях.

Пример 3.3-3

В примере 3.3-1 априорные вероятности 0.6 и 0.4 повышения и понижения котировок акций на бирже были определены из наличных публикаций финансового характера. Предположим, вместо того чтобы полностью полагаться на эти публикации, вы решили провести личное исследование путем консультаций с другом, который хорошо разбирается в вопросах, касающихся фондовой биржи. Друг высказывает общее мнение "за" или "против" инвестиций. Это мнение в дальнейшем определяется количественно следующим образом. При повышении котировок его мнение с 90 %-ной вероятностью будет "за", при снижении котировок вероятность его мнения "за" уменьшится до 50 %. Каким образом можно извлечь пользу из этой дополнительной информации?

Мнение друга фактически представляет условные вероятности "за - против" при заданных состояниях природы в виде повышения и понижения котировок. Введем следующие обозначения:

v_1 — мнение "за",

v_2 — мнение "против",

m_1 — повышение котировок,

m_2 — понижение котировок.

Мнение друга можно записать в виде вероятностных соотношений следующим образом.

$$P\{v_1 \mid m_1\} = 0{,}9 \quad P\{v_1 \mid m_2\} = 0{,}1,$$

$$P\{v_2 \mid m_1\} = 0{,}5\,,\; P\{v_1 \mid m_2\} = 0{,}5.$$

С помощью этой дополнительной информации задачу выбора решения можно сформулировать следующим образом.

1. Если мнение друга "за", акции какой компании следует покупать – *A* или *B*?

2. Если мнение друга "против", то, опять-таки, – акции какой компании следует покупать – *A* или *B*?

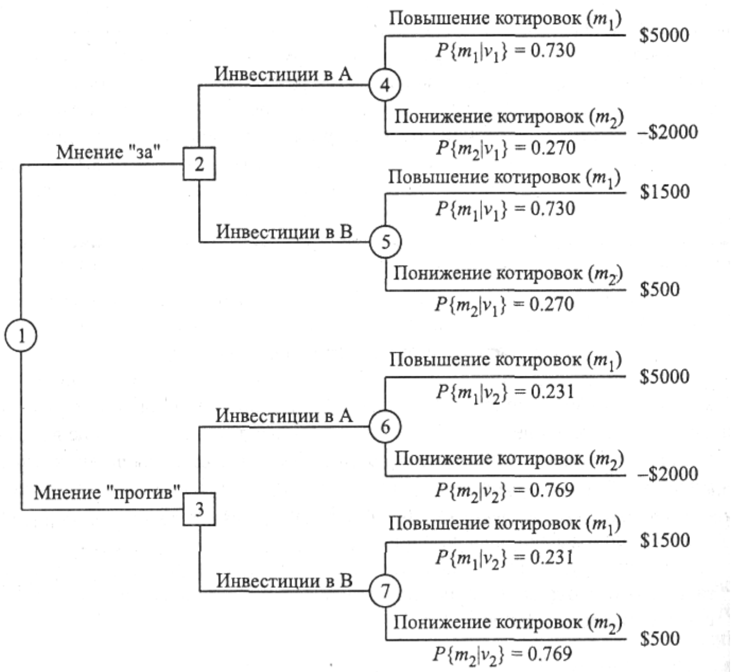


рис. 14.3.

Рассматриваемую задачу можно представить в виде дерева решений, показанного на рис. 14.4. Узлу 1 здесь соответствует случайное событие, мнение друга, с I соответствующими вероятностями "за" и "против". Узлы 2 и 3 представляют выбор между компаниями *A* и *B* при известном мнении друга "за" или "против" со- I ответственно. Узлы 4-7 соответствуют случайным событиям, связанным с повышением и понижением котировок.

Для оценки различных альтернатив, показанных на рис. 14.4, необходимо вычислить апостериорные вероятности $P\{m_i \mid v_j\}$, указанные на соответствующих ветвях, выходящих из узлов 4-7. Эти апостериорные вероятности вычисляются с учетом дополнительной информации, содержащейся в рекомендациях друга, с помощью следующих действий.

Шаг 1. Условные вероятности $P\left\{v_j \mid m_i\right\}$ для данной задачи запишем следующим образом.

$$P\left\{v_j \mid m_i\right\} =$$

	v_1	v_2
m_1	0.9	0.1
m_2	0.5	0.5

Шаг 2. Вычисляем вероятности совместного появления событий.

$$P\left\{m_i, v_j\right\} = P\left\{v_j \middle| m_i\right\} P\left\{m_i\right\} \text{ для всех } i \text{ и } j$$

При заданных *априорных* вероятностях $P\{m_1]$ = 0.6 и $P\{m_2\}$ = 0.4 вероятности совместного появления событий определяются умножением первой и второй строк таблицы, полученной на шаге 1, на 0.6 и 0.4 соответственно. В результате имеем следующее.

$$P\left\{m_i, v_j\right\} =$$

	v_1	v_2
m_1	0.54	0.06
m_2	0.20	0.20

Сумма всех элементов этой таблицы равна 1.

Шаг 3. Вычисляем абсолютные вероятности.

$$P\left\{v_j\right\} = \sum_{\text{все } i} P\left\{m_i, v_j\right\}, \text{для всех } j.$$

Эти вероятности получаются путем суммирования элементов соответствующих столбцов таблицы, полученной на шаге 2. В итоге имеем следующее.

Шаг 4. Определяем искомые апостериорные вероятности по формуле

$$P\left\{m_i \mid v_j\right\} = \frac{P\left\{m_i, v_j\right\}}{P\left\{v_j\right\}}.$$

Эти вероятности вычисляются в результате деления каждого столбца таблицы, полученной на шаге 2, на элемент соответствующего столбца таблицы, вычисленной на шаге 3, что приводит к следующим результатам (округленным до трех десятичных знаков).

$$P\left\{v_j \middle| m_i\right\} =$$

	v_1	v_2
m_1	0.730	0.231
m_2	0.270	0.769

Это те вероятности, которые показаны на рис. 14.4. Они отличаются от исходных априорных вероятностей $P\{m_1\}$ = 0.6 и $P\{m_2]$ = 0.4.

Теперь можно оценить альтернативные решения, основанные на ожидаемых платежах для узлов 4-7.

Мнение "за"

Доход от акций компании *A* в узле 4 = 5000 x 0.730 + (-2000) x 0.270 = $**3110.**

Доход от акций компании *B* в узле 5 = 1500 x 0.730 + 500 x 0.270 = $1230.

Решение. Инвестировать в акции компании *A*.

Мнение "против"
Доход от акций компании *A* в узле 6 = 5000 х 0.231 + (-2000) х 0.769 = -$383.
Доход от акций компании *B* в узле 7 = 1500 х 0.231 + 500 х 0.769 = $**731**.

Решение. Инвестировать в акции компании *B*.

Заметим, что предыдущие решения эквивалентны утверждению, что ожидаемые платы в узлах 2 и 3 равны 3110 и 731 доллар соответственно (рис. 14.4). Следовательно, при известных вероятностях $P\{v_1\}$ = 0.74 и $P\{v_2\}$ = 0.26, вычисленных на шаге 3, можно вычислить ожидаемую плату для всего дерева решений (упр. 14.3,с(3)).

Упражнения 3.3,с

1. Несмотря на сезон дождей, Джим Боб планирует завтра идти на рыбалку, но только если не будет дождя. Из данных о погоде прошлых лет следует, что имеется 70 %-ная вероятность, что в сезон дождей будет идти дождь. В шесть часов вечера синоптики предсказали с 85 %-ной вероятностью, что завтра будет дождь. Следует ли Джиму Бобу планировать рыбалку на завтра?

2. Фирма Электра получает 75 % электронных деталей от поставщика *A* и 25 % – от поставщика *B*. Доля брака в продукции поставщиков *A* и *B* составляет 1 % и 2 % соответственно. При проверке пяти деталей из полученной партии обнаружена лишь одна дефектная. Определите вероятность того, что партия получена от поставщика *A*. Проведите аналогичные вычисления относительно поставщика *B*. (*Подсказка.* Вероятность появления бракованной детали в партии подчиняется биномиальному закону распределения.)

3. Предположим, что в задаче из примера 3.3-3 есть дополнительный выбор, связанный с инвестированием 10 000 долларов в надежный депозит, который приносит 8 % прибыли. Совет вашего друга, по-прежнему, относится к инвестированию через биржу.

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Какое оптимальное решение в этом случае? (*Совет.* Используйте вероятности $P\{v_1\}$ и $P\{v_2\}$, полученные на шаге 3 в примере 3.3-3, для вычисления ожидаемой суммы инвестирования через биржу.)

4. Допустим, вы являетесь автором романа, который обещает быть популярным. У вас имеется возможность либо самостоятельно напечатать роман, либо через издательство. Издательство предлагает вам 20 000 долларов за подписание контракта. Если роман будет пользоваться спросом, будет продано 200 000 экземпляров, в противном случае – лишь 10 000 экземпляров. Издательство выплачивает авторский гонорар в сумме один доллар за экземпляр. Исследование рынка, проведенное издательством, свидетельствует о том, что существует 70 %-ная вероятность, что роман будет популярным. Если же вы сами напечатаете роман, то понесете потери в сумме 90 000 долларов, связанные с печатанием и маркетингом, но в этом случае каждый проданный экземпляр принесет вам прибыль в два доллара.

a) Принимая во внимание имеющуюся информацию, примете ли вы предложение издательства или будете печатать роман самостоятельно?

b) Предположим, что вы заключили договор с литературным агентом на исследование, связанное с потенциальным успехом романа. Исходя из предыдущего опыта, компания извещает вас, что если роман будет пользоваться спросом, то исследование предскажет неверный результат в 20 % случаев. Если же роман будет не популярен, то исследование предскажет верный результат в 85 % случаев. Как эта информация повлияет на ваше решение?

5. Вернитесь к проблеме выбора решения фермером Мак Коем из упр. 3.3,а(2). Фермер имеет дополнительный выбор, связанный с использованием земли как пастбища, что гарантированно принесет ему прибыль в 7500 долларов. Фермер получил также дополнительную информацию от брокера, касающуюся степени стабильности будущих цен на продукцию. Оценки брокера "благоприятный — неблагоприятный" затем выражаются количественно в виде следующих условных вероятностей.

$P\left\{a_j \middle| s_i\right\} =$

	a_1	a_2
s_1	0.15	0.85
s_2	0.50	0.50
s_3	0.85	0.15

В данном случае a_1 и a_2 – оценки брокера "благоприятный" и "неблагоприятный", а s_1 s_2 и s_3 представляют изменение в будущих ценах: соответственно "понижение", "такие же", "повышение".

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Найдите оптимальное решение задачи.

6. Пусть в упр. 3.3,а(5) дирекция компании решила провести пробную продажу своей продукции в выбранных населенных пунктах. Результатом пробной продажи являются оценки "хорошо" (a_1) или "плохо" (a_2). Тест дает следующие условные вероятности с проведением рекламной кампании и без нее.

$P\left\{a_j \middle| v_i\right\}$ с рекламной кампанией

	a_1	a_2
v_1	0.95	0.05
v_2	0.3	0.7

$P\left\{a_j \middle| v_i\right\}$ без рекламной кампании

	a_1	a_2
w_1	0.8	0.2
w_2	0.4	0.6

Здесь символы v_1 и v_2 обозначают, соответственно, "успех" и "неуспех", а w_1 и w_2 – "восприимчивый" и "невосприимчивый" покупатель.

a) Постройте соответствующее дерево решений.

b) Определите оптимальный план действий фирмы.

7. Статистические данные о работе компании показывают, что с вероятностью 5 % произведенная партия продукции будет неприемлемой (плохой). Плохая партия содержит 15 % дефектных изделий, а хорошая – лишь 4 %. Пусть значение переменной $a = a_1$ ($= a_2$) обозначает, что партия изделий является хорошей (плохой). Тогда соответствующие априорные вероятности равны соответственно $P\{a = a_1\} = 0.95$ $P\{a = a_2\}=0.05$.

Вместо того чтобы отправить партии продукции с характеристиками, основанными на априорных вероятностях, из каждой партии проверяются два изделия. Возможны следующие результаты проверки.

Оба изделия являются доброкачественными (s_1).
Одно изделие является доброкачественным (s_2).
Оба изделия являются бракованными (s_3).

a) Определите апостериорные вероятности $P\{a_i | s_j\}, i = 1,2; j = 1,2,3$.

b) Предположим, что фирма отправляет партии продукции двум потребителям *A* и *B*. Контракты с ними определяют, что процент бракованных изделий в поставках не должен превышать 5 % и 8 % соответственно. Предусматривается штраф в 100 долларов за превышение на один процент максимально допустимого лимита бракованных изделий. Поставка партий лучшего качества, чем указано в контракте, приносит производителю прибыль в 80 долларов за каждый процент уменьшения доли бракованных изделий. Постройте соответствующее дерево решений и определите приоритетную стратегию отправки партий продукции.

ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ. В предыдущих примерах критерий ожидаемого значения применялся лишь в тех ситуациях, где платежи выражались в виде *реальных* денег. Имеются многочисленные случаи, когда при анализе следует использовать скорее *полезность,* чем реальную величину платежей. Для демонстрации этого предположим, что имеется шанс 50 на 50, что инвестиция в 20 000 долларов или принесет прибыль в 40 000 долларов, или будет полностью потеряна. Соответствующая ожидаемая прибыль равна 40 000 х 0.5 - 20000 х 0.5 = 10000 долларов. Хотя здесь ожидается прибыль в виде чистого дохода, разные люди могут по-разному интерпретировать полученный результат. Инвестор, который идет на риск, может сделать инвестицию, чтобы с вероятностью 50 % получить прибыль в 40 000 долларов. Наоборот, осторожный инвестор может не выразить желания рисковать потерей 20 000 долларов. С этой точки зрения очевидно, что разные индивидуумы проявляют разное отношение к риску, т.е. они проявляют разную *полезность* по отношению к риску.

Определение полезности является субъективным. Оно зависит от нашего отношения к риску. В этом разделе мы представляем систематизированную процедуру числовой оценки отношения к риску лица, принимающего решение. Конечным результатом является функция полезности, которая занимает место реальных денег.

В примере, приведенном выше, наилучший платеж равен $40 000, а наихудший – $20 000. Следовательно, мы устанавливаем произвольную, но логическую шкалу полезности *U,* изменяющуюся от 0 до 100, где 0 соответствует полезности -$ 20 000, а 100 – $40 000, т.е. *U* (-20000) = 0 и *U*(40000) = 100. Далее определяем полезность в точках между -$ 20 000 и $40000 для определения общего вида функции полезности.

Если отношение лица, принимающего решение, беспристрастно к риску, то результирующая функция полезности является прямой линией, соединяющей точки (0, –$ 20 000) и (100, $ 40 000). В этом случае как реальные деньги, так и их полезность дают совпадающие решения. В более реальных ситуациях функция полезности может принимать другой вид, отражающий отношение к риску лица, принимающего решение. Рис. 14.5 иллюстрирует вид функции полезности для трех индивидуумов *X, Y* и *Z*. Индивидуум *X* **не расположен к риску** (осторожен), так как проявляет большую чувствительность к потере, чем к прибыли. Индивидуум *Z* – противоположность в этом отношении индивиду *X;* он **настроен на риск.** Это следует из того, что для индивидуума *X* при изменении в 10 000 долларов вправо и влево от точки, соответствующей 0 долларов, увеличение прибыли изменяет полезность на величину *ab,* которая меньше изменения полезности *be,* обусловленной потерями такой же величины, т.е. *ab* < *be.* В то же время такие же изменения в ±10 000 долларов, относящиеся к индивидууму *Z*, обнаруживают противоположное поведение; здесь *de* > *ef.* Далее, индивидуум *Y* является **нейтральным к риску,** так как упомянутые изменения порождают одинаковые изменения полезности. В общем случае индивидуум может быть как не расположен к риску, так и настроен на риск, в зависимости от суммы риска. В этом случае соответствующая кривая полезности будет иметь вид удлиненной буквы *S*.

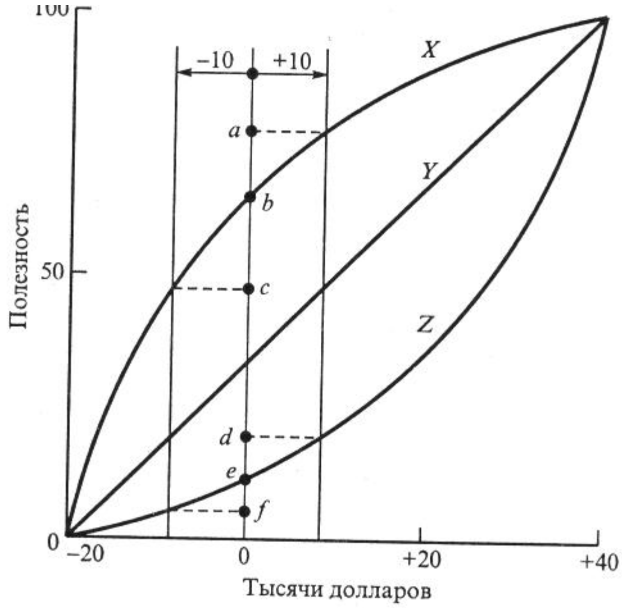


рис. 14.5

Кривые полезности, аналогичные изображенным на рис. 14.5, определены с помощью количественного показателя, характеризующего отношение к риску лица, принимающего решение, для различных значений уровня реальных денег в пределах установленного интервала. Так рассмотренном примере установленным интервалом является (– $ 20 000, $ 40 000), соответствующая полезность изменяется в интервале (0, 100). Необходимо определить полезность, соответствующую таким промежуточным значениям, например, как – $10 000, $0, $10 000, $20 000 или $30 000. Соответствующая процедура построения функции полезности начинается с того, что организовывается лотерея для определения суммы реальных денег *x*, для которой ожидаемое значение полезности будет вычислено по следующей формуле.

$$U(x) = pU(-20000) + (1-p)U(40000) = 0p + 100(1-p) = 100 - 100p, 0 \le p \le 1.$$

Для определения значения *U(x)* просят лицо, принимающее решение, сообщить свое предпочтение между гарантированной наличной суммой x и возможностью сыграть в лотерею, в которой с вероятностью p реализуется проигрыш в сумме $20000 и с вероятностью 1 – *p* имеет место выигрыш в $ 40 000. При этом под предпочтением понимается выбор значения "нейтральной" вероятности *p*, при котором с точки зрения лица, принимающего решение, возможности сыграть в лотерею и получить гарантированную сумму *x* являются одинаково привлекательными. Например, если *x* = $ 20 000, лицо, принимающее решение, может заявить, что гарантированные 20 000 долларов наличными и лотерея одинаково привлекательны при *p* = 0.8. В этом случае вычисляется полезность для *x* = $20 000 по следующей формуле.

$$U(20000) = 100 + 100 \times 0.8 = 20$$

Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено достаточное количество точек (*x, U(x)*) для определения формы функции полезности. Затем можно определить искомую функцию полезности путем регрессионного анализа или просто линейной интерполяции между полученными точками.

Хотя здесь применяется количественная процедура для определения функции полезности, сам подход далек от того, чтобы быть научно обоснованным. То, что процедура полностью определяется мнением лица, принимающего решение, порождает сомнения относительно надежности описанного процесса. Процедура, в частности, неявно предполагает, что лицо, принимающее решение, является рационально мыслящим – требование, которое не всегда может быть согласовано с вариациями в поведении и настроении, что является типичным для человеческой личности. В этом отношении лицо, принимающее решение, должно придерживаться концепции полезности в широком смысле, в соответствии с которой денежные величины не должны быть единственным решающим фактором в теории принятия решений.

Упражнения 3.3,d

1. Допустим, вы – студент университета штата Арканзас и имеете сильное желание присутствовать на следующем баскетбольном матче. Проблема в том, что входной билет стоит 10 долларов, а у вас есть лишь 5 долларов. Вы можете рискнуть 5 долларами в игре в покер с шансами 50 на 50 удвоить свою сумму или совсем ее проиграть.

a) Будете ли вы, исходя из реальной стоимости денег, искушать судьбу, играя в покер?

b) Учитывая ваше сильное желание присутствовать на матче, переведите наличные деньги в функцию полезности.

c) Основываясь на функции полезности, которую вы построили, примете ли вы участие в игре в покер?

2. Семья переехала в местность, где возможны землетрясения, и собирается построить дом. Решается вопрос, стоит ли строить дом в соответствии с высокими стандартами, рассчитанными на сейсмическую зону. Строительство дома в соответствии с такими стандартами обойдется в 850 000 долларов, а без их учета – в 350 000 долларов. В случае землетрясения (его вероятность равна 0.001) восстановление дома, построенного без соответствующих стандартов, обойдется в 900 000 долларов. Примените в этой ситуации рассмотренную выше процедуру использования лотереи, предполагая, что шкала полезности изменяется от 0 до 100.

3. Инвестиция в 10 000 долларов в предприятие с высоким уровнем риска имеет шанс 50 на 50 увеличить эту сумму до 14 000 долларов на протяжении следующего года либо уменьшить ее до 8 000 долларов. Это значит, что чистый доход составит либо 4000 долларов, либо – 2000 долларов.

a) Принимая позицию нейтрального к риску инвестора и шкалу полезности от 0 до 100, определите полезность 0 долларов чистого дохода и соответствующую "нейтральную" вероятность.

b) Пусть два инвестора *A* и *B* определили следующие "нейтральные" вероятности.

Чистая прибыль ($)	**Вероятность**	
	Инвестор *A*	**Инвестор *B***
– 2000	1.00	1.00
– 1000	0.30	0.90
0	0.20	0.80
1000	0.15	0.70
2000	0.10	0.50
3000	0.05	0.40
4000	0.00	0.00

Нарисуйте графики функций полезности для инвесторов *A* и *B* и охарактеризуйте их отношение к риску.

c) Пусть инвестор *A* имеет возможность сделать инвестицию в одно из двух рискованных предприятий: I или П. Инвестиция в предприятие I может принести прибыль в сумме 3000 долларов с вероятностью 0.4 или убыток в 1000 долларов с вероятностью 0.6. Инвестиция в предприятие II может принести прибыль в 2000 долларов с вероятностью 0.6 или вовсе не принести прибыли с вероятностью 0.4. Используя функцию полезности инвестора *A*, построенную в предыдущем пункте, и критерий ожидаемой полезности, определите предприятие, которое следует выбрать инвестору *A*. Каково ожидаемое денежное значение, соответствующее выбранному предприятию (используйте линейную интерполяцию функции полезности)?

d) Повторите упражнение предыдущего пункта для инвестора *B*.

3.4. Принятие решений в условиях неопределенности

Принятие решений в условиях неопределенности, как и в условиях риска, требует определения альтернативных действий, которым соответствуют платежи, зависящие от (случайных) *состояний природы*. Матрицу платежей в задаче принятия решений с m возможными действиями и n состояниями природы можно представить следующим образом.

	s_1	s_2	…	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	…	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	…	$v(a_2, s_n)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	…	$v(a_m, s_n)$

Элемент a_i представляет i-е возможное решение, а элемент s_j – j-е состояние природы. Плата (или доход), связанная с решением a_i, и состоянием s_j, равна $v(a_i\ s_j)$.

Отличие между принятием решений в условиях риска и неопределенности состоит в том, что в условиях неопределенности вероятностное распределение, соответствующее состояниям s_j, $j = 1, 2, ..., n,$ либо неизвестно, либо не может быть определено. Этот недостаток информации обусловил развитие следующих критериев для анализа ситуации, связанной с принятием решений.

1. Критерий Лапласа.
2. Минимаксный критерий.
3. Критерий Сэвиджа.
4. Критерий Гурвица.

Эти критерии отличаются по степени консерватизма, который проявляет индивидуум, принимающий решение, перед лицом неопределенности.

Критерий Лапласа опирается на **принцип недостаточного основания**[1], который гласит, что поскольку распределение вероятностей состояний $P(s_j)$ неизвестно, нет причин считать их различными. Следовательно, используется *оптимистическое* предположение, что вероятности всех состояний природы равны между собой, т.е. $P\{s_1\} = P\{s_2\} = ... = P\{s_n\} = 1/n$. Если при этом $v(a_h\ s_j)$ представляет получаемую прибыль, то наилучшим решением является то, которое обеспечивает

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j) \right\}.$$

[1] Этот принцип впервые сформулирован Я. Бернулли.

Если величина $v(a_i,\ s_j)$ представляет расходы лица, принимающего решение, то оператор "max" заменяется на "min".

Максиминный (минимаксный) критерий основан на консервативном осторожном поведении лица, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших. Если величина $v(a_i,\ s_j)$ представляет получаемую прибыль, то в соответствии с *максиминнъш* критерием в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_J} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Если величина $v(a_i,\ s_j)$ представляет потери, используется минимаксный критерий, который определяется следующим соотношением.

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_J} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм *минимаксного (максиминного)* критерия путем замены матрицы платежей (выигрышей или проигрышей) $v(a_i,\ s_j)$ матрицей потерь $r(a_i,\ s_j)$, которая определяется следующим образом.

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\} - v(a_i, s_j) & \text{если} \quad v - \text{доход}, \\ v(a_i, s_j) - \min\limits_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\} & \text{если} \quad v - \text{потери}. \end{cases}$$

Чтобы показать, как критерий Сэвиджа "смягчает" минимаксный (максиминный) критерий, рассмотрим следующую матрицу платежей $v(a_i,\ s_j)$:

	s_1	s_2	Максимум строк	
a_1	$ 11 000	$ 90	$ 11 000	
a_2	$ 10 000	$ 10 000	**$ 10 000**	← Минимакс

Применение минимаксного критерия приводит к тому, что решение a_2 с фиксированными потерями в 10000 долларов является предпочтительным. Однако можно выбрать a_1, так как в этом случае имеется возможность потерять лишь 90 долларов, если реализуется состояние s_2.

Посмотрим, какой результат получится, если в минимаксном критерии вместо матрицы платежей $v(a_i,\ s_j)$ используем матрицу потерь $r(a_i,\ s_j)$.

	s_1	s_2	Максимум строк	
a_1	$ 1 000	$ 0	**$ 1 000**	← Минимакс
a_2	$ 0	$ 9 910	$ 9 910	

Как видим, минимаксный критерий, применяемый к матрице потерь, приводит к выбору решения a_1 в качестве предпочтительного.

Рассмотрим теперь **критерий Гурвица**. Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного). Пусть $0 \le \alpha \le 1$ и величины $v(a_h\ s_j)$ представляют доходы. Тогда решению, выбранному по критерию Гурвица, соответствует

$$\max_{a_i}\left\{\alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Параметр α – показатель оптимизма. Если α = 0, критерий Гурвица становится консервативным, так как его применение эквивалентно применению обычного минимаксного критерия. Если a = 1, критерий Гурвица становится слишком оптимистичным, ибо рассчитывает на наилучшие из наилучших условий. Мы можем конкретизировать степень оптимизма (или пессимизма) надлежащим выбором величины α из интервала [0, 1]. При отсутствии ярко выраженной склонности к оптимизму или пессимизму выбор α =0.5 представляется наиболее разумным.

Если величины $v(a_i, s_j)$ представляют потери, то критерий принимает следующий вид:

$$\min_{a_i}\left\{\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Пример 3.4-1

Национальная школа выживания подбирает место для строительства летнего лагеря в центре Аляски, в целях тренировки людей на выживание в условиях дикой природы. Школа считает, что число участников сбора может быть 200, 250, 300 или 350 человек. Стоимость летнего лагеря будет минимальной, поскольку он строится для удовлетворения только точно определенных небольших потребностей. Отклонения в сторону уменьшения или увеличения относительно идеальных уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты, обусловленные строительством избыточных (неиспользуемых) мощностей или потерей возможности получить прибыль в случае, когда некоторые потребности не удовлетворяются. Пусть переменные a_1 – a_4 представляют возможные размеры лагеря (на 200, 250, 300 или 350 человек), а переменные s_1 – s_4 — соответствующее число участников сбора. Следующая таблица содержит матрицу стоимостей (в тысячах долларов), относящуюся к описанной ситуации.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Описанная ситуация анализируется с точки зрения четырех рассмотренных выше критериев.

Критерий Лапласа. При заданных вероятностях $P\{s_j\}$ = 1/4, j = 1, 2, 3,4, ожидаемые значения затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом.

$$M\{a_1\} = \left(1/4\right)\left(5+10+18+25\right) = \$14500,$$

$$M\{a_2\} = \left(1/4\right)\left(8+7+12+23\right) = \mathbf{\$12500} \leftarrow \text{ оптимум},$$

$$M\{a_3\} = \left(1/4\right)\left(21+18+12+21\right) = \$18000,$$

$$M\{a_4\} = \left(1/4\right)\left(30+22+19+15\right) = \$21500.$$

Минимаксный критерий. Этот критерий использует исходную матрицу стоимостей.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	**21** ← минимакс
a_4	30	22	19	15	30

Критерий Сэвиджа. Матрица потерь определяется посредством вычитания чисел 5, 7, 12 и 15 из элементов столбцов от первого до четвертого соответственно. Следовательно,

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	**8**← минимакс
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Критерий Грвица. результаты вычислений содержатся в следующей таблице.

Альтернатива	Минимум строк	Максимум строк	α (Минимум строки) + (1– α) (Максимум строки)
a_1	5	25	25-20α
a_2	7	23	23-16α
a_3	12	21	21-9α
a_4	15	30	30-15α

Используя подходящее значение для α, можно определить оптимальную альтернативу. Например, при α =0.5 оптимальными являются либо альтернатива a_1 либо a_2, тогда как при α = 0.25 оптимальным является решение a_3.

Упражнения 3.4,а

1. Хенк – прилежный студент, который обычно получает хорошие отметки благодаря, тому, что имеет возможность повторить материал в ночь перед экзаменом. Перед завтрашним экзаменом Хенк столкнулся с небольшой проблемой. Его сокурсники организовали на всю ночь вечеринку, в которой он не хочет участвовать. Хенк имеет три альтернативы:

a_1 — участвовать в вечеринке всю ночь,

a_2 — половину ночи участвовать в вечеринке, а половину — учиться,

a_3 — учиться всю ночь.

Профессор, принимающий завтрашний экзамен, непредсказуем в том смысле, что экзамен может быть легким (s_1), средним (s_2) или трудным (s_3). В зависимости от сложности экзамена и времени, затраченного Хенком на повторение, можно ожидать следующие экзаменационные баллы.

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

а) Порекомендуйте Хенку, какой выбор он должен сделать (основываясь на каждом из четырех критериев принятия решений в условиях неопределенности).

b) Предположим, что Хенк более заинтересован в оценке (в буквенном выражении), которую он получит на экзамене. Буквенным оценкам от A до D, означающим сдачу экзамена, соответствует 90, 80, 70 и 60 баллов. Иначе при числе баллов ниже 60 студент получает оценку F, которая свидетельствует о том, что экзамен не сдан. Изменит ли такое отношение к оценкам выбор Хенка?

2. В приближении посевного сезона фермер Мак-Кой имеет четыре альтернативы:

a_1 — выращивать кукурузу,
a_2 — выращивать пшеницу,
a_3 — выращивать соевые бобы,
a_4 — использовать землю под пастбища.

Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на четыре категории:

s_1 — сильные осадки,
s_2 — умеренные осадки,
s_3 — незначительные осадки,
s_4 — засушливый сезон.

Платежная матрица (в тысячах долларов) оценивается следующим образом.

$$\begin{array}{c|cccc|} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline a_1 & -20 & 60 & 30 & -5 \\ a_2 & 40 & 50 & 35 & 0 \\ a_3 & -50 & 100 & 45 & -10 \\ a_4 & 12 & 15 & 15 & 10 \\ \hline \end{array}$$

Что должен посеять Мак-Кой?

3. Один из N станков должен быть выбран для изготовления Q единиц определенной продукции. Минимальная и максимальная потребность в продукции равна Q^* и Q^{**} соответственно. Производственные затраты TC_i, на изготовление Q единиц продукции на станке i включают фиксированные затраты K_i и удельные затраты c_i на производство единицы продукции и выражаются формулой $Tc_i = K_i + c_iQ$.

a) Решите задачу с помощью каждого из четырех критериев принятия решений в условиях неопределенности.

b) Решите задачу при следующих данных, предполагая, что $1000 \leq Q \leq 4000$.

Станок i	**K_i ($)**	**c_i ($)**
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

3.5. Введение в теорию игр

В практической деятельности весьма часто приходится рассматривать явления и ситуации, в которых участвуют две или более стороны, имеющие различные интересы и обладающие возможностями применять для достижения своих целей разнообразные действия. Подобные явления и ситуации принято называть конфликтными, или просто конфликтами.

Типичный конфликт характеризуется тремя основными составляющими:
заинтересованными сторонами,
возможными действиями этих сторон,
интересами сторон.

Конфликтная ситуация, взятая из реальной жизни, как правило, довольно сложна. К тому же ее изучение затруднено наличием многих разных обстоятельств, часть из которых не оказывает сколь-либо существенного влияния ни на развитие конфликта, ни на его исход. Поэтому для того, чтобы анализ конфликтной ситуации оказался возможным, необходимо отвлечение от этих второстепенных факторов, при удачном стечении обстоятельств позволяющее построить упрощенную формализованную модель конфликта, которую и принято называть *игрой.* От реальной конфликтной ситуации игра отличается еще и тем, что ведется по вполне определенным правилам.

Необходимость изучения и анализа конфликтов, представляемых в виде упрощенных математических моделей (игр), вызвала к жизни специальный математический аппарат — *теорию игр.*

Опишем некоторые основные понятия, используемые в этой теории.

Заинтересованные стороны называются *игроками*. Любое возможное для игрока действие (в рамках заданных *правил игры*) называется его *стратегией*. В условиях конфликта каждый игрок выбирает свою стратегию, в результате чего складывается набор стратегий, называемый *ситуацией*. Заинтересованность игроков в ситуации проявляется в том, что каждому игроку в каждой ситуации приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации и называемое его *выигрышем* в ней.

В этих условиях протекание конфликта состоит в выборе каждым игроком своей стратегии и в получении им в сложившейся ситуации выигрыша из некоторого источника. На этом пути создается *теория игр с выигрышами*.

Однако оценка игроком ситуации путем указания его выигрыша, вообще говоря, не всегда возможна практически и даже не всегда имеет смысл. В подобных случаях иногда удается вместо прямых численных оценок ситуаций указывать на их сравнительную предпочтительность для отдельных игроков. На этом пути создается *теория игр с предпочтениями*, включающая в себя как частный случай и теорию игр с выигрышами. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только игр с выигрышами.

Изучение игр можно проводить с различных точек зрения. Мы будем стремиться к

– выработке принципов оптимальности, то есть того, какое поведение игроков следует считать оптимальным (разумным, целесообразным),
– выяснению реализуемости этих принципов, то есть установлению существования оптимальных в выработанном смысле ситуаций, и
– отысканию этих реализаций.

Одной из плодотворных форм реализации представлений об оптимальности можно считать понятие *равновесия*, при котором складывается такая (равновесная) ситуация, в нарушении которой не заинтересован ни один из игроков.

Именно ситуации равновесия могут быть предметом устойчивых договоров между игроками (ни у одного из игроков не будет мотивов к нарушению договора). Кроме того, ситуации равновесия являются выгодными для каждого игрока: в равновесной ситуации каждый игрок получает наибольший выигрыш (разумеется, в той мере, в какой это от него зависит).

Если в игре ситуации равновесия (в пределах отпущенных возможностей) нет, то, оставаясь в условиях стратегий, имеющихся у игроков, мы сталкиваемся с неразрешимой задачей. При возникновении подобных случаев естественно ставить вопрос о таком расширении первоначального понятия стратегии, чтобы среди ситуаций, составленных из новых, обобщенных стратегий, заведомо нашлись бы равновесные. Если такие обобщенные стратегии существуют, то обычно они представляются некоторыми комбинациями исходных стратегий (при этом, естественно, предполагается, что игра повторяется многократно). Для того, чтобы отличать прежние стратегии от новых, первые называют *чистыми*, а вторые — *смешанными* стратегиями.

Весьма плодотворным является представление смешанной стратегии как случайного выбора игроками их чистых стратегий, при котором случайные выборы различных игроков независимы в совокупности, а выигрыш каждого из них определяется как математическое ожидание случайного выигрыша. Игра, преобразованная таким образом, обычно называется *смешанным расширением* исходной игры.

Проиллюстрируем сказанное на примере одного из самых простых, но одновременно и наиболее изученных классов игр, на так называемых матричных играх. Исследование матричных игр интересно еще и потому, что к ним могут быть приближенно сведены многие игры более общего вида.

Затем мы кратко остановимся на вопросе классификации игр и рассмотрим еще два вида игр — *позиционные игры и биматричные игры*.